

博士学位請求論文要旨

Credit Defaults and Prepayments in Portfolios

– Models of Event-Type Risks and Their Applications –

正田智昭

本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。

第1章 Introduction

- 1.1 Motivation of this study
- 1.2 Abstract and purpose for each chapter

第2章 Analyses of Mortgage-Backed Securities Based on Unobservable Prepayment Cost Processes

- 2.1 Introduction
 - 2.1.1 Background and preceding studies
 - 2.1.2 Motivation and outline of our model
- 2.2 Model
 - 2.2.1 Prepayment cost
 - 2.2.2 Loan pool risk
- 2.3 Conditional distribution of prepayment time in loan pools
- 2.4 Pricing of pass-through MBS
- 2.5 Categorization of mortgagors
- 2.6 Numerical experiment on simulation
 - 2.6.1 Setting for the numerical experiment
 - 2.6.2 Result: class-wise conditional distribution of prepayment cost and hazard rate
 - 2.6.3 Result: model-parameter estimation
 - 2.6.4 Result: numerical computation of theoretical hazard rate
- 2.7 Conclusion
- 2.8 Appendix
 - 2.8.1 Prepayment cost
 - 2.8.2 Approximated computation of transition density of prepayment cost with

mean-reverting idiosyncratic cost

第3章 Dynamical Analysis of Corporate Bonds based on the Yield Spread Term-Quality Surface

3.1 Introduction

3.2 The model

3.2.1 Review of defaultable bonds pricing with random recovery

3.2.2 The macro and micro indicators of credit risk

3.2.3 An example of our model

3.3 Data analysis

3.3.1 The observation model

3.3.2 The result of data analysis

3.4 Conclusion 59

3.5 Appendix

3.5.1 Proof of theorem 3.2.4

第4章 An Implied Default Dependency Model of a Credit Portfolio based on the Number of Defaults

4.1 Introduction

4.2 General framework

4.2.1 The model of a defaultable portfolio

4.2.2 The market

4.2.3 Minimal entropy martingale measures

4.3 A tractable model

4.4 Market practice

4.5 Conclusions

4.6 Appendix

4.6.1 Present value of credit index tranches

4.6.2 Proof of theorem 4.2.5

4.6.3 Proof of proposition 4.3.3

4.6.4 Proof of corollary 4.3.4

4.6.5 Proof of remark 4.3.5

第5章 Conclusion

本研究の目的

本論文のテーマは、ポートフォリオにおけるイベント型リスクである。イベント型リスクとは、それが生起するか否か、生起するとしたらいつかということが、予測できない確率的な事象（イベント）によって生じるリスクである。本研究では、金融市場において重要と思われる、ポートフォリオにおけるイベント型リスクの3つの事例について、それぞれに適したアプローチによって分析する。各アプローチにおいて、情報の果たす役割、生起確率の動的変化、イベントの相互依存性など、ポートフォリオにおけるイベント型リスクの異なる側面に焦点を当てることにより、ポートフォリオにおけるイベント型リスクの多面的な特徴について、より深い理解を得ることを本研究の目的とする。

クレジットリスクとプリペイメントリスクは、いずれもファイナンスにおいて最も重要であり、よく知られたイベント型リスクである。クレジットリスクとは、債務者の破産というイベントにより生じる、債権者の富の潜在的な損失である。また、プリペイメントリスクとは、債券もしくは融資において、満期以前の元本返済というイベントによって生じる、キャッシュフローの潜在的変化である。それらは経済的に異なる意味を持つが、たとえば、両方とも確率論でいう停止時間により記述できるなど、数学的には同じような取り扱いが可能である。

イベント型リスクは、ヘッジが比較的困難である一方、それが起こった場合の影響は大きい。一方、イベントが同時に発生しなければ、ポートフォリオによるリスク分散が有効である。そのため、イベント型リスクをもつ資産への投資においては、多数の資産をまとめてポートフォリオとしたものが好まれる。

長い歴史をもった、そのような資産のひとつに、不動産担保証券 (RMBS) がある。RMBS によって、投資家は住宅ローンのポートフォリオへの投資が可能になる。債務のポートフォリオを対象とした似たような商品としては、債務担保証券 (CDO) がある。RMBS や CDO のように、多数の債務契約を証券にまとめる作業を証券化とよぶ。今日、特に証券化商品が 2007 年に世界規模の金融危機を招いてからは、証券化はファイナンスにおいて注目を集める話題の 1 つである。この危機を招いた原因は様々な分野にわたるが、数理ファイナンスにおいては、証券化市場の発展に研究が対応しきれていなかったという反省がある。本研究は、ポートフォリオにおけるイベント型リスクについての研究を更に洗練させることで、この実務上の要望にも応えようとするものである。

ポートフォリオにおけるイベント型リスクの万能モデルを構築するという目標は現実的ではない。それが困難である本質的な理由は、まず、資産数の増加に伴い状態数が容易に爆発してしまうことである。イベント型リスクを持つ N 個の資産に対して、結合確率は 2^N 個の状態について定義される。これは容易に巨大な数に発散し、モデルは扱いが困難になる。そのため、イベントの生起確率に基づいて、イベントの相互の関連や、分散の効率性を集約する必要が生じる。

また、イベント型リスクにおいて、多くの場合に情報は非対称である。例えば、クレジットリスクに関して言えば、債務者は自己の資金繰りについて投資家よりも多くを知っている。プリペイメントが各債務者にどれだけのメリットがあるかについても、投資家はより少ない情報しか持たない。そのため、イベント型リスクのモデル化では、誰がどの情報を知っているかについて注意を払う必要がある。

つまり、ポートフォリオにおけるイベント型リスクのモデル化では、生起確率、ポートフォリオの大きさ、利用可能な情報、対象とする商品によって、モデル化のアプローチを変えなければならない。更に、市場に対する洞察をふまえて、状況にあった数理モデルを提案することが求められる。

本論文で研究対象とした各市場とそれらへのアプローチの詳細は以下で述べる。

住宅ローン証券化商品

論文第2章において、不動産証券化商品 (MBS) の価格付けと住宅ローンのプリペイメントについて投資家の観点から研究する。不動産証券化商品は、抵当権つきローンのプールから生じるキャッシュフローに対する請求権をあらわす証券化商品の一種である。この章では、最も普及した不動産証券化商品である、住宅ローンを対象とした住宅ローン証券化商品 (RMBS) について考察する。住宅ローンの債務者は、モーゲージャー (抵当権設定者) と呼ばれ、ローンの抵当として住宅を差し出す。多くの場合、住宅ローン債務者はローンを期限前返済 (プリペイメント) する権利を有する。

RMBS の参照ローンプールには、数千の債務者が含まれ、典型的なプリペイメントは年率 10% 程度である。したがって、プリペイメント数は参照ローンプールにおいて実際に観測される。更に、プリペイメントの統計分析では、数百万件のローンが分析対象になる。一方、RMBS の投資家は、個々の債務者について限られた情報しか持たない。そのほとんどは、契約時の集約された属性情報である。債務者が多数であり、彼らに対する情報は少ないという点が、住宅ローン債務者のプリペイメント分析の特徴となっている。そのため、実務的には統計モデルが好まれる傾向にある。

本研究では、構造的アプローチに基づく住宅ローンのプリペイメントモデルを提案する。その目的は、プリペイメントにおける情報の役割、とりわけ情報の非対称性と情報に基づくプリペイメント伝染を解説するためである。Duffie-Lando (2001) は、債務者には予測可能 (predictable) なデフォルト時刻が、債権者には予測不可能 (inaccessible) となり得ることを示した。Laurent-Gregory (2003) と Schönbucher (2004) は、ある債務者のデフォルトがポートフォリオ中の他の債務者の真のデフォルトリスクについての情報をもたらさず場合、直接の因果関係がなくてもデフォルトの伝染が生じると指摘した。この現象は、情報によるデフォルトの伝染とよばれる。

プリペイメントについても、デフォルトと同じことが言える。構造モデルであっても、投資家にはプリペイメント自国が予測不可能なモデルを構築できる。投資家は住宅ローン債務者について少ない情報しか持たないため、実際のプリペイメントが住宅ローン債務者について多くの情報をもたらす。もし、投資家の予想とは異なるプリペイメントが実現されたとしたら、投資家はそれ以降の予想についても見直すべきである。これは、情報に基づくプリペイメントの伝染である。

個別ブラウン運動と住宅ローン金利によって駆動される連続過程として、プリペイメントコスト過程を各住宅ローン債務者に導入する。各住宅ローン債務者のプリペイメント時刻は、構造的アプローチをもちいて、そのプリペイメントコスト過程がゼロ以下に落ちた最初の時刻として定義される。この機構により、いわゆる住宅ローンプールの燃え尽き（バーンアウト）現象が自然に再現される。住宅ローン金利が低下すると、住宅ローン債務者にとってより安い金利でローンを借り換えるチャンスとなる。そのため、プリペイメントが加速される。だが、住宅ローンプールが既に金利低下を経験していると、再び金利が低下しても借り換えが少なくなる。これが住宅ローンプールの燃え尽きとよばれる現象である。

このモデルでは、プリペイメントコスト過程が可測なフィルトレーションにおいて、プリペイメントは予測可能（predictable）である。RMBSの投資家は、プリペイメントコスト過程が観測できないものとする。これは、投資家のもつ情報の下で、プリペイメントが予測不可能（inaccessible）であることを意味する。

更に、ローンプールリスク（LPR）と呼称する各ローンプールに固有のリスクを導入し、LPRを金利とは別のシステムティックリスクとみなす。LPRの分布は、時間を追って実現されたプリペイメントによって更新される。これにより、情報に基づくプリペイメントの伝染が生じることを示す。

プリペイメント時刻の条件付分布と、パススルー型RMBSのリスク中立価格評価について議論し、このモデルをもちいたシミュレーションにもとづく数値実験をおこなう。RMBSの価格評価では、市場が漸近的無裁定条件を満たす場合、ローンプール中の個別リスクが、漸近的に分散消滅することを調べる。それによりRMBSの公正価値が、LPRのリスク中立測度における事後分布と、実測度におけるハザード過程を用いて表されることを示す。

数値実験により、このモデルの有用性を確認する。まず、計算コストを低減するため、住宅ローン債務者をいくつかのクラスに分類することを提案する。次に、クラスごとにプリペイメントコストの条件付分布を計算し、借り換え金利のサンプルパスに対応するハザード率を求める。千人および一万人のローン債務者について、プリペイメント時刻をシミュレートする。最後に、債務者の属性分析を想定しながら、その結果を用いて、LPRの条件付期待値のサンプルパスと各月の理論ハザード率を算出し、LRPと共変ベクトルの係数を再推定する。

債券ポートフォリオ

論文第3章では、クレジットリスクの例として、投資適格債券への投資について考察する。投資家のポートフォリオの銘柄数は任意であるが、日本国内に数百銘柄存在する投資適格債券に対し、十分分散されたポートフォリオを構築するものと想定する。

投資適格債券のデフォルトは希な事象であり、数年程度の投資期間中、実際にはポートフォリオにデフォルトが発生しない可能性が高い。また、デフォルト実績も少なく、住宅ローンのプリペイメントとは異なり、データに基づく統計分析は困難である。しかも、第4章でのべるクレジット・インデックス・トランシェと違って、社債投資には多重デフォルトや信用恐慌に対するレバレッジの仕組みもない。したがって、投資適格債券への投資においては、クレジットリスクは潜在的リスクに過ぎず、市場価格の変動リスクが投資家の主要な関心事である。

一方、投資家は発行体の資金繰りや収益などの情報を有しており、住宅ローン債務者の場合より入手できるデータは多い。それらの企業情報から信用力を測るには、企業分析の深い知見が必要となるため、その代替として信用格付けが用いられる。

以上を踏まえ、投資適格債券の市場価格の変動リスクのモデル化を本章の目的とする。その際、ポートフォリオ全体のリスクと個別のリスクの分解に重点を置き、格付け情報を通じた企業の信用力に関する情報も応用する。

社債の利回りは、無リスク利回りとそこからの利回りスプレッドで構成される。利回りスプレッドは、デフォルトによる期待損失への補償とみなされる。そのため、その大きさは社債の信用力に依存する。経験上、信用力と市場の状況に見合ったある「適切な」利回り期間構造が存在する。市場に存在する全ての債券を考えると、それらは期間と信用力の空間における場を構成する。ここではそれを「利回りスプレッド期間信用力曲面」(YSTQS)とよぶことにする。各債券の価格変動は、それらの発行企業の信用力の変動と、YSTQSの変動によってあらわされる。YSTQSに基づくモデルは、社債投資における経験的な知見に合致するものと考えられる。

モデルを定式化するにあたり、各企業の信用力をあらかず拡散過程を導入する。それを「信用力指標」(CQI)と名付ける。YSTQSは、CQIと債券の残存期間の関数となる。一方、YSTQSは動的なものでなければならない。無リスク債券の価格付けに対する数学的アプローチを参考にすると、マルコフ状態変数アプローチにより、扱いやすい動的なYSTQSのモデルが構築可能と考えられる。信用市場の状況をあらかず拡散過程を導入し、「マクロ信用指標」(MCI)と名付ける。各企業の損失補正瞬間デフォルト率が、CQIとMCIの関数であると仮定する。更にいくつかの仮定のもとで、利回りスプレッド期間構造が満たすべき偏微分方程式が導出される。

信用格付けは、実証分析において導入される。本研究では、2種類の観測をもった濾過モデルを構築する。一つめの観測対象は、社債の利回りスプレッドである。二つめとして、信用格付けをCQIの観測結果とみなす。

債券ポートフォリオのクレジットスプレッドの分析についての先行研究との違いは、CQIが各発行体に固有の拡散過程であり、格付けと観測モデルによって結びつけられている点である。例えばFeldhütter-Lando(2005)では、企業の信用力の指標は格付けそのものである。Douady-Jeanblanc(2002)は格付けがジャンプ拡散過程である場合について論じているが、実証分析可能なモデルは提示されていない。

実証分析から、社債投資に対していくつかの興味深い結果が得られた。CQIの経路から、信用市場の状態からの影響を補正した各企業の信用力の変化を見ることができる。MQIの経路から、AAAからBBBまでの格付けを包括する信用市場の経過をみることができる。それをもちいて、任意の信用力に対する利回りスプレッド期間構造の時間変化を追うことが可能となる。

クレジット・インデックス・トランシェ

論文第4章では、クレジット・インデックス・トランシェについて研究する。クレジット・インデックスは、クレジット・デフォルト・スワップ(CDS)の等ウェイトポートフォリオである。ポートフォリオ中の企業は、地域、信用力、業種、取引の多寡などによって選ばれる。CDSは信用リスク転嫁の基本的な金融ツールである。CDSは保証の購入者と売却者の間の二者間取引である。保証の売却者は、契約の満期まで参照資産の信用破綻による損失を補償する。そのかわり、保証の購入者は、信用事由が生じない場合、契約の満期まで売却者にプレミアムを支払う。信用事由が生じた場合、契約は終了し、プレミアムの支払いは終了する。

クレジット・インデックス・トランシェは、債務担保証券(CDO)と同じようなもので、これを通じて、インデックスの損失に対するアタッチメント点からデタッチメント点までのリスクに投資することができる。言い換えると、クレジット・インデックス・トランシェは、多重デフォルトや、信用恐慌に対するレバレッジ投資ツールである。この点が、クレジット・インデックス・トランシェ契約と、第3章で述べた社債ポートフォリオ投資との間の大きな違いである。このため、デフォルト依存性の評価を、本章における主要なテーマとする。

クレジット・インデックス・トランシェについては詳しい情報を得ることができる。信用格付けを含む参照企業の情報に加えて、今日の市場では参照 CDS の詳細な情報を得ることも可能である。また、参照ポートフォリオの大きさは、百銘柄程度に過ぎない。第 2 章で取り上げた RMBS とは対照的に、比較的小さいポートフォリオと詳細な情報というのが、クレジット・インデックスの特徴である。そのため、実務的には、モデルはクレジット・インデックス・トランシェおよび、参照ポートフォリオに含まれる全ての個別 CDS に対して、正確にキャリブレーションできることが望ましい。

1 つのクレジット・インデックスに対して、モデルのパラメータが対象となるトランシェによって変わってしまうという「相関スマイル」と呼ばれる問題があることが明らかであるにもかかわらず、ガウス型およびその他の 1 パラメータ・コピュラモデルが、デフォルト依存性モデルとして市場標準となっている。それに加え、多数一様ポートフォリオの仮定がなければ、これらモデルのキャリブレーションには一般にシミュレーションが必要になり、一方でこの仮定をおくと、各企業に対するトランシェのリスクを算出できなくなってしまう。

本論文では、正確なキャリブレーションが可能な市場インプライド型デフォルト依存性モデルを提案する。このモデルのキャリブレーションは非一様ポートフォリオに対してもシミュレーションを必要とせず、そのため頑健かつ非常に高速である。トップダウンアプローチ (Giesecke et.al (2009), Bielecki et.al (2008)) や、インプライド・ファクター・コピュラアプローチ (Hull-White (2006, 2009), Nedeljkovic et.al (2009)) などの他の代替アプローチと比較すると、本モデルの方が市場データに対するキャリブレーションにおいて優れている。

まず最小エントロピー・マルティンゲール測度におけるポートフォリオの結合デフォルト確率を与える。さらに市場に関する無理のない仮定の下で、上記のモデルを導出する。次に、主要なクレジット・インデックスである CDX NA IG に対して、本モデルのキャリブレーションをおこない、リスクを評価する。多重デフォルトが生じる確率は、リスク中立確率測度において、デフォルトが独立に生じると仮定した確率測度よりも、顕著に大きいことがわかる。リスク分析から、スーパー・シニア・トランシェであっても、優良企業の最初のデフォルトに対して、大きなリスク・エクスポージャーを持っていることと、「悪い」企業の信用力の低下が、優先トランシェの価値を増大させ得ることがわかる。

結論と課題

最後に、本論文で行った議論を総括した上でその含意を論じるとともに、本論文で扱うことができなかった課題について言及する。

第 2 章では、構造的アプローチにより MBS のプリペイメントモデルを構築し、バーンアウト現象や、情報によるプリペイメントの伝染が自然な形で現れることを示した。更に、漸近的無裁定に基づくパススルー型 MBS の価格付けをおこなった。残された大きな課題は、実データに基づくモデルキャリブレーションである。また、実務的に広く使われている統計モデルとの比較を通じて、それらの構造についてどのような示唆を与えられるかという研究も、応用として興味深い。

第3章で構築したモデルでは、市場性リスクに焦点を当て、MCIとCQIは拡散過程としたが、それらがデフォルトや回収率に陽に依存するとすれば、デフォルトの伝染をモデルに取り込むことができる。デフォルトの伝染は、実務・理論の両面で注目される現象であるが、そのような拡張の下で、YSTQSが導出可能なモデルを構築することは簡単ではないだろう。

第4章では、クレジット・インデックス・トランシェとCDSの価値評価のため、評価時点における価格付け測度について議論した。このとき、結合デフォルト確率の動的性質については特定する必要がなかったが、動的性質は、マーケット・フィルトレーションを具体的に与えることで特定される。クレジット・デフォルト・スワップション、クレジット・インデックス・トランシェ・オプションの価値は、動的性質に依存するため、その評価のためには、このようなモデルの拡張が必要となる。また、インデックスとは異なる参照企業、トランチングをもったCDO (bespoke CDO) の評価も課題である。このためには、参照ポートフォリオの拡張や分割の影響について研究しなければならない。また、キャッシュフローがデフォルト企業に依存するような場合、再帰法が上手く機能しないため、シミュレーションなどの代替手法を考える必要がある。