CDOプライシングに関する一考察
確率母関数とLHP近似との比較

一橋大学国際企業戦略研究科
金融戦略コース在籍
IM05F013　梶田　由布子

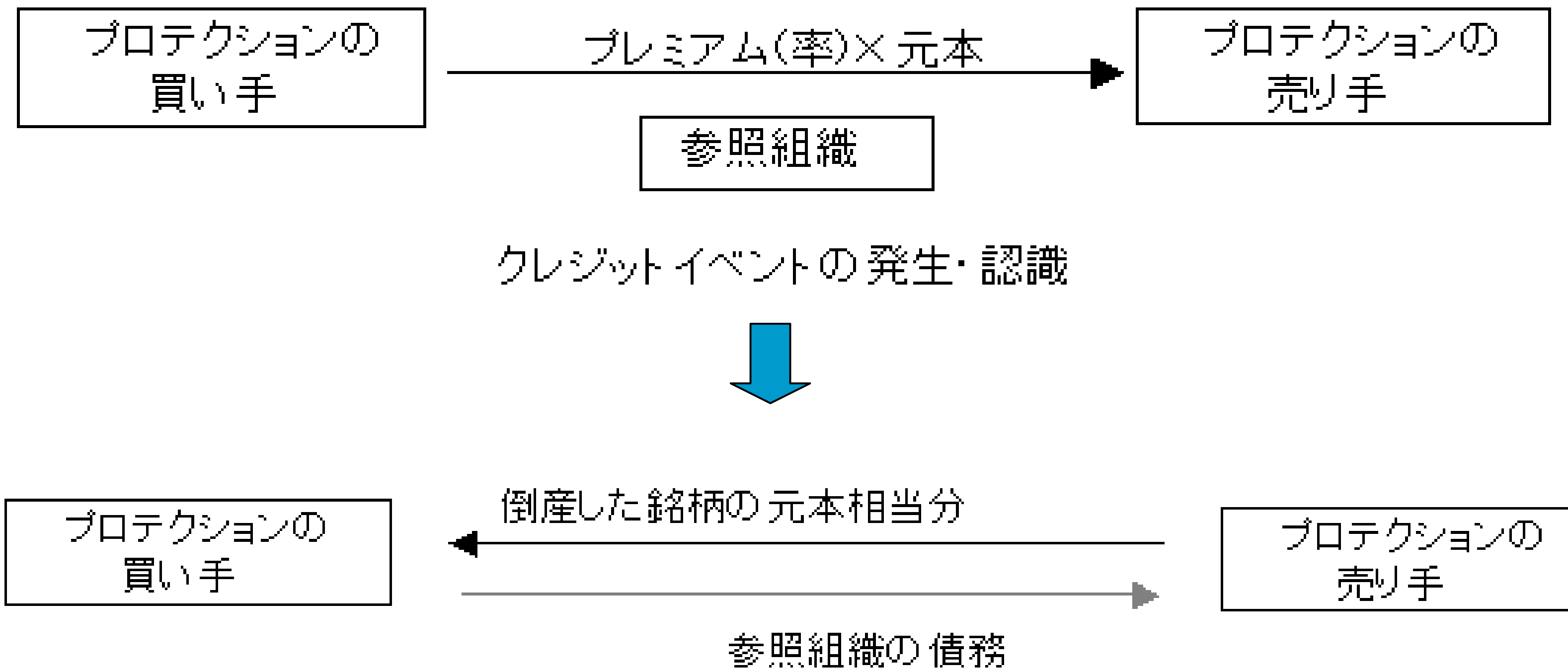
研究の目的

CDOプライシングにおいて.

①Large Homogeneous Portfolio近似と確率母関数(個別企業の性質が反映される)に基づく損失分布との比較を行うことにより、LHP近似をの誤差傾向を見る。

②共通ファクターの係数を共通ファクターの値に応じて変化させることにより、全体の経済状況が依存関係に影響を与えることを表現。

CDOの概要



参照組織のクレジットイベントにより元本が減少する。

CDOの投資家は参照ポートフォリオの累積損失が

K_A(アタッチメント・ポイント)以上、K_D(デタッチメント・ポイント)の範囲で影響を受ける。

満期がTであるCDOについて

参照ポートフォリオに含まれる企業数：N 社

n : 企業のインデックス　n=1,…,N

R_n：企業nのリカバリーレート

A_n：企業nの参照元本

$L_n = (1 - R_n) A_n$　　デフォルトした場合の損失

$N_n(t) = 1_{(\tau_n < t)}$:企業nが時刻t　までにデフォルトした場合1をとる定義関数

時刻 t におけるポートフォリオの累積損失額 L(t)

$$L(t) = \sum_{n=1}^{N} L_n N_n(t)$$

メザニン･トランシェの累積(デフォルト時)支払い　M(t)

$$M(t)=\begin{cases}0 & L(t)\le K_A\text{の時}\\ L(t)-K_A & K_A\le L(t)\le K_B\text{の時}\\ K_B-K_A & L(t)\ge K_B\text{の時}\end{cases}$$

K_A:アタッチメント･ポイント

K_D:デタッチメント･ポイント

iTraxx CJ　5年　トランチング例

トランシェ	K_A	K_D
0-3%	0%	3%
3-6%	3%	6%
6-9%	6%	9%
9-12%	9%	12%
12-22%	12%	22%

まとめると

$$M(t)=(L(t)-K_A)1_{[K_A,K_D]}(L(t))+(K_D-K_A)1_{]K_D,\sum N_n(t)]}(L(t))$$

最適なプレミアムの決定方法(その①)

最適プレミアムを W* とすると、

$$PL(W^*) - DL = 0$$

PL=固定支払いサイド(プレミアム支払いの現在価値)
DL=デフォルト時支払いサイド(損失の現在価値)

$$W^* = \frac{\sum_{i=1}^{I} B(t_0, t_i)(EL_{(K_A,K_D)}(t_i) - EL_{(K_A,K_D)}(t_{i-1}))}{\sum_{i=1}^{I} \Delta t_i B(t_0, t_{i-1})[1 - EL_{(K_A,K_D)}(t_{i-1})]}$$

$EL_{(K_A,K_D)}(t_i)$： トランシェの期待損失額 $E[M(t_i)]$ のパーセント表示ｚｚ

最適なプレミアムの決定方法（その②）

トランシェの期待損失額 E[M(t_i)] **のパーセント表示**

EL$_{(K_A,K_D)}$(t_i)

$$EL_{(K_A,K_D)}(t_i)=\frac{E[M(t_i)]}{K_D-K_A}$$

$$=\frac{1}{K_D-K_A}\sum_{n=1}^{N}(\min(L_n(t_i),K_D)-K_A)^+ p_n(t_i)$$

累積損失額 L(t)**の分布**F(x) **が連続的である場合**

$$EL_{(K_A,K_D)}=\frac{1}{K_D-K_A}\left(\int_{K_A}^{1}(x-K_A)dF(x)-\int_{K_D}^{1}(x-K_D)dF(x)\right)$$

損失分布の求め方

Large Homogeneous Portfolio **近似(連続的分布)について**

(c.f. Schönbucher (2000)など)

- **依存関係が共通ファクターY**で**表現される**

  ⇒ **企業の信用力** $X_n = \sqrt{\rho_n} Y + \sqrt{1-\rho_n}\,\varepsilon_n$

- **ポートフォリオが同質な企業群から構成されている**

  ⇒ **共通ファクターYが与えられた条件付デフォルト確率**

$$p_n(Y) = p(Y) = F\left(\frac{K - \sqrt{\rho} Y}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

- **ポートフォリオを構成する企業数が多い**(N**→∞**)

  ⇒ **ポートフォリオの損失分布(例:変数が正規分布する場合)**

$$F_\infty(\theta) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\,\Phi^{-1}(p) - K}{\sqrt{\rho}}\right)$$

拡張その①(確率母関数による損失分布の導出)

ポートフォリオの損失分布を、デフォルト数 $N(t)=\sum_{n=1}^{N}N_n(t)$ **の (離散的)確率から求める**

Laurent & Gregory (2003)　N(t)**の確率母関数を利用**

$$\psi_{N(t)}(u)=E[u^{N(t)}]=\sum_{k=0}^{N}\Pr(N(t)=k)u^k$$

$$=E[\prod_{n=0}^{N}(1-p_{t,n}(Y)+p_{t,n}(Y)\times u)]$$

$$=E[u^N\phi_N(Y)+\cdots+u^k\phi_k(Y)+\cdots+u^0\phi_0(Y)]$$

ここで、 $\Pr(N(t)=k)=E[\phi_k(Y)]$

拡張その②
「ファクターの係数が一定」を見直す

Andersen & Sidenius (2004)による Random Factor Loadings(以下 RFL)

企業の信用力をあらわす変数X_nについて

$$X_n = a_n(Y)Y + m_n + v_n\varepsilon_n \qquad m_n, v_n$$ ：調整パラメータ

共通ファクターの値によって係数を変化させることにより
経済状況によって変化する依存関係をあらわすことが可能となる

$$a_n(Y) = \begin{cases} \alpha_n & Y \le \theta_n \text{の時} \\ \beta_n & Y > \theta_n \text{の時} \end{cases} \qquad \alpha_n, \beta_n$$ は正の定数

例えば、 $\alpha_n > \beta_n$ なら全体の景気が悪いときに
各企業のクレジットイベントに対する依存度合いが高まる

計算結果①

市場データに基づく結果 （α＞βが推定されている）

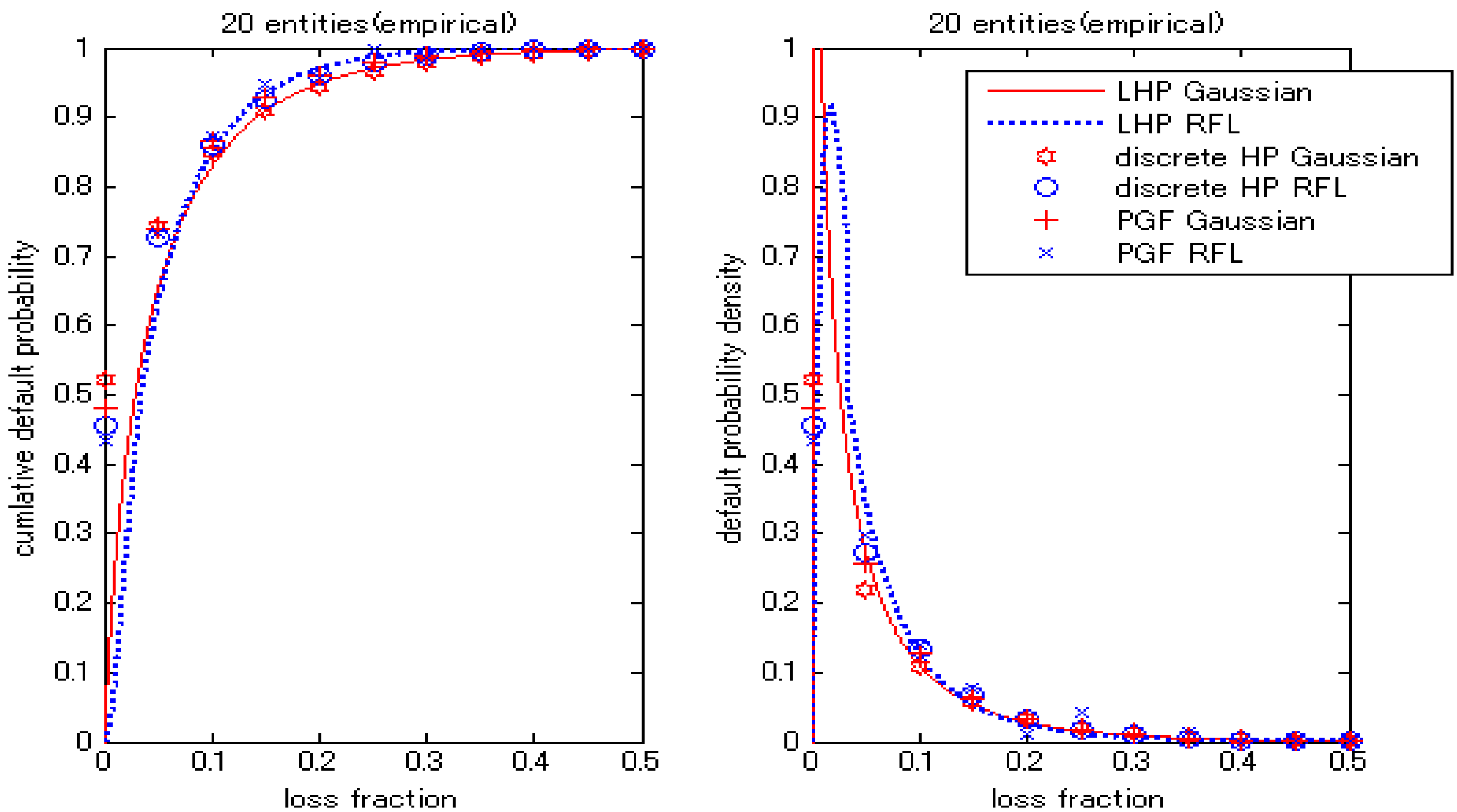
	確率母関数		HP		LHP	
	Gaussian	RFL	Gaussian	RFL	Gaussian	RFL
0～10%	699.10	739.32	630.84	735.23	696.33	814.44
10～20%	84.95	60.39	112.96	83.79	84.09	48.29
20～30%	14.09	9.46	25.09	11.61	15.06	4.29
30～40%	2.21	0.67	5.23	1.40	2.44	0.31
40～50%	2.25	0.03	0.86	0.13	0.27	0.01
50～	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00

（年率、bp）

HP(Homogeneous Portfolio)**は最下位トランシェのプレミアムを小さく、上位トランシェのプレミアムを大きく評価する**

RFL**で**LHP**近似を適用すると最下位トランシェのプレミアムが大きく評価される**

損失分布の比較①



20 entities(empirical)
cumlative default probability
loss fraction
20 entities(empirical)
default probability density
loss fraction
LHP Gaussian
LHP RFL
discrete HP Gaussian
discrete HP RFL
PGF Gaussian
PGF RFL

計算結果②-1
周辺デフォルト確率のみ変動させる(Gaussian)

（年率、bp）

Gaussian	確率母関数			HP	LHP
	変化大	変化中	変化小		
0~10%	1178.20	1169.70	1163.80	1094.50	1285.50
10~20%	261.89	266.97	270.87	274.60	204.96
20~30%	61.29	65.72	68.95	72.86	39.20
30~40%	11.36	13.19	14.52	16.16	6.23
40~50%	1.64	2.12	2.48	2.93	0.63
50~	0.03	0.04	0.05	0.07	0.00

周辺デフォルト確率の変動が大きいと最下位トランシェのプレミアムが大きくなり、上位トランシェのプレミアムは小さくなる

計算結果②-1
周辺デフォルト確率のみ変化させる(RFL, α > β)

α > β　　　　　　　　　　　　　　　　　（年率、bp）

RFL	確率母関数			HP	LHP
	変化大	変化中	変化小		
0~10%	1155.70	1145.10	1137.70	1129.10	1305.80
10~20%	250.43	255.06	258.64	263.20	211.85
20~30%	72.61	77.38	80.82	85.00	58.22
30~40%	18.69	21.28	23.11	25.33	14.73
40~50%	4.01	4.99	5.68	6.52	2.77
50~	0.11	0.16	0.20	0.24	0.05

計算結果②-1
周辺デフォルト確率のみ変動させる(RFL, α＜β)

α＜β　　　　（年率、bp）

RFL	確率母関数			HP	LHP
	変化大	変化中	変化小		
0～10%	1367.00	1366.50	1366.40	1365.10	1743.20
10～20%	206.91	212.31	216.43	221.39	35.53
20～30%	14.70	16.09	17.16	18.57	0.00
30～40%	0.30	0.37	0.43	0.17	0.00
40～50%	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
50～	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

パラメータ変動による影響は少ない

計算結果②-2
共通ファクターの係数のみ変動させる(Gaussian)

（年率、bp）

Gaussian	確率母関数		HP	LHP
	変化大	変化小		
0～10%	1117.10	1153.20	1094.50	1285.50
10～20%	263.50	274.43	274.60	204.96
20～30%	97.75	75.17	72.86	39.20
30～40%	24.92	17.10	16.16	6.23
40～50%	2.93	2.98	2.93	0.63
50～	0.02	0.06	0.07	0.00

共通ファクターの係数の変動大→上位トランシェのプレミアムが大きくなる

計算結果②-2
共通ファクターの係数のみ変化させる(RFL, α＞β)

α＞β　　　　（年率、bp）

RFL	確率母関数		HP	LHP
	変化大	変化小		
0～10%	1125.40	1128.60	1129.10	1305.80
10～20%	261.85	262.95	263.20	211.85
20～30%	87.93	85.44	85.00	58.22
30～40%	26.43	25.50	25.33	14.73
40～50%	6.21	6.49	6.52	2.77
50～	0.17	0.23	0.24	0.05

計算結果②-2
共通ファクターの係数のみ変化させる(RFL, α＜β)

α＜β　　　　　　　　　　　　（年率、bp）

RFL	確率母関数		HP	LHP
	変化大	変化小		
0～10%	1368.00	1366.40	1365.10	1743.20
10～20%	220.07	221.43	221.39	35.53
20～30%	18.85	18.61	18.57	0.00
30～40%	0.55	0.52	0.17	0.00
40～50%	0.01	0.01	0.01	0.00
50～	0.00	0.00	0.00	0.00

パラメータ変動による影響は少ない

計算結果②-3
周辺デフォルト確率、共通ファクター係数を共に変化させる(Gaussian)

（年率、bp）

Gaussian	確率母関数		HP	LHP
	同じ	逆		
0～10%	975.25	1199.30	1094.50	1285.50
10～20%	323.15	235.54	274.60	204.96
20～30%	121.51	63.14	72.86	39.20
30～40%	23.09	16.47	16.16	6.23
40～50%	1.50	3.87	2.93	0.63
50～	0.00	0.13	0.07	0.00

パラメータを同じ方向に変動させると、上位トランシェのプレミアムが大きくなり、逆方向に変動させると、最下位トランシェのプレミアムが大きくなる

計算結果②-3

周辺デフォルト確率、共通ファクター係数を共に変化させる(RFL, α > β)

α > β　　　　　　　　　　　　（年率、bp）

RFL	確率母関数		HP	LHP
	同じ	逆		
0～10%	1079.90	1199.30	1129.10	1305.80
10～20%	277.68	235.54	263.20	211.85
20～30%	91.03	63.14	85.00	58.22
30～40%	22.97	16.47	25.33	14.73
40～50%	3.71	3.87	6.52	2.77
50～	0.05	0.13	0.24	0.05

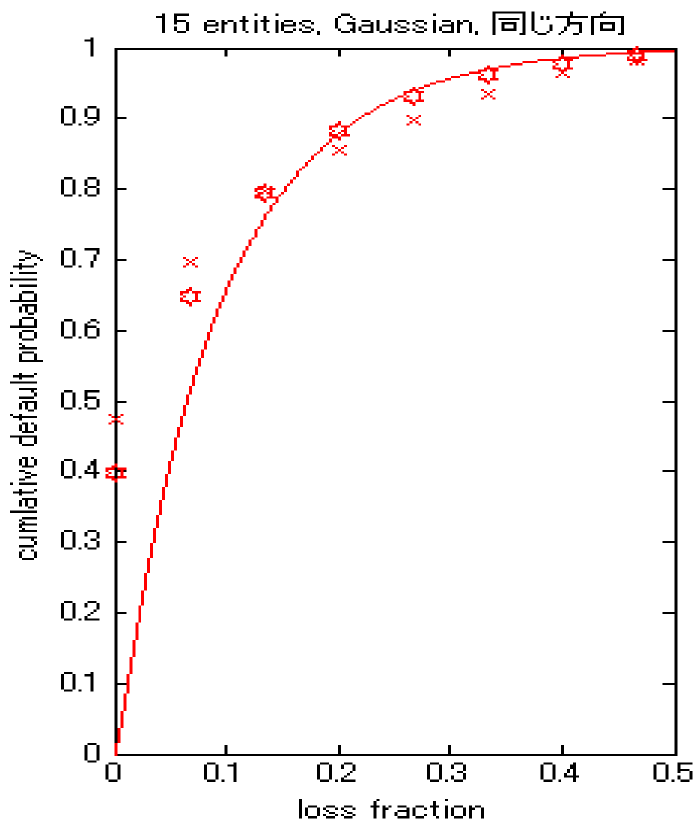
計算結果②-3
周辺デフォルト確率、共通ファクター係数を共に変化させる(RFL, α < β)

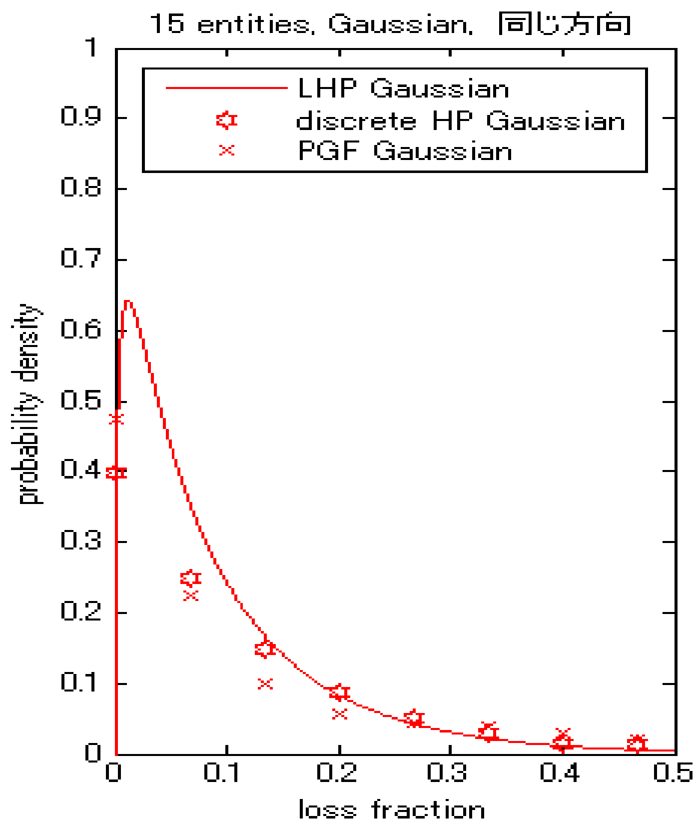
α < β　　　　　　　　　　　　　　（年率、bp)

RFL	確率母関数		HP	LHP
	同じ	逆		
0～10%	1333.50	1363.50	1365.10	1743.20
10～20%	223.93	209.87	221.39	35.53
20～30%	18.51	14.42	18.57	0.00
30～40%	0.44	0.27	0.17	0.00
40～50%	0.00	0.00	0.01	0.00
50～	0.00	0.00	0.00	0.00

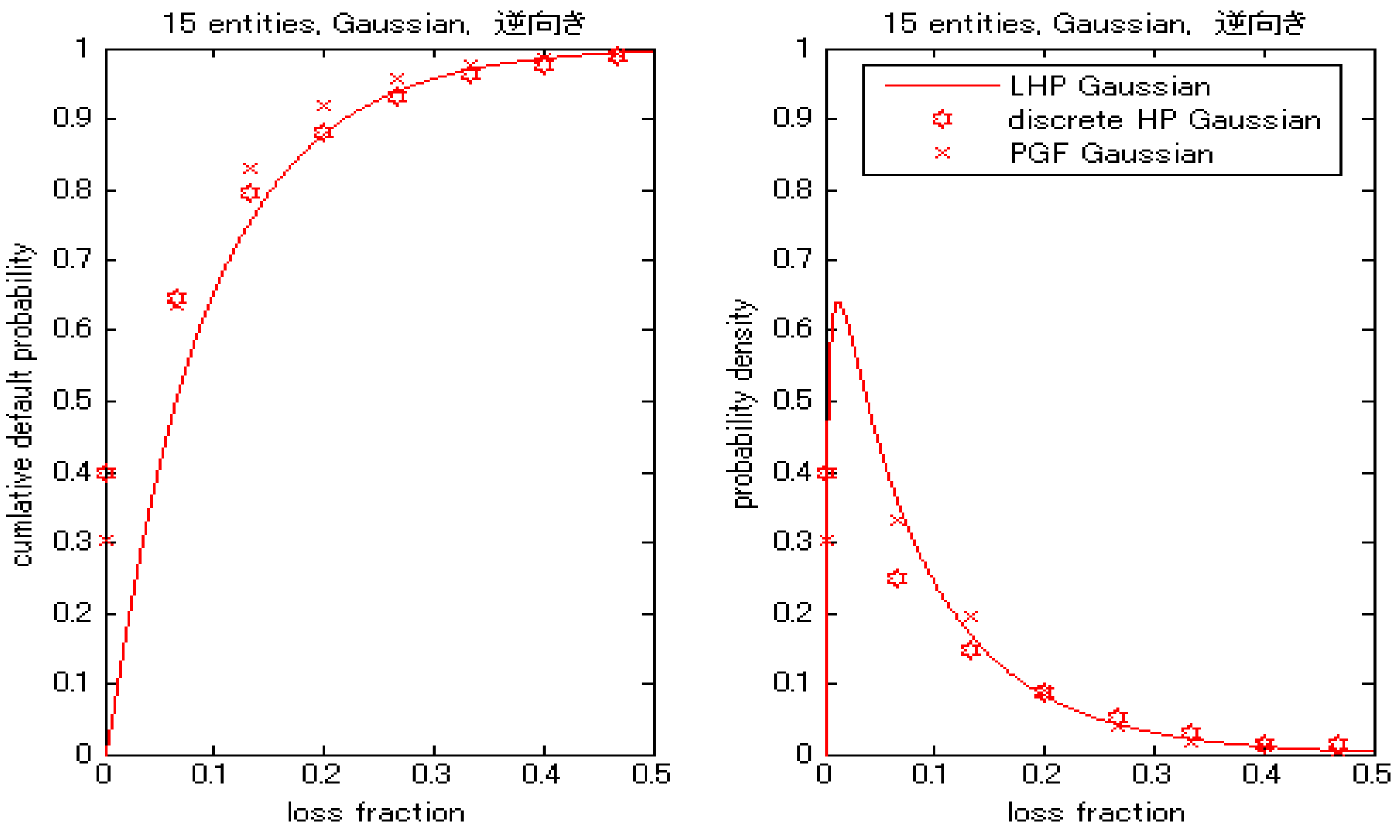
パラメータ変動による影響は(相対的に)少ない

損失分布の比較②-3
(Gussian,同じ向き)

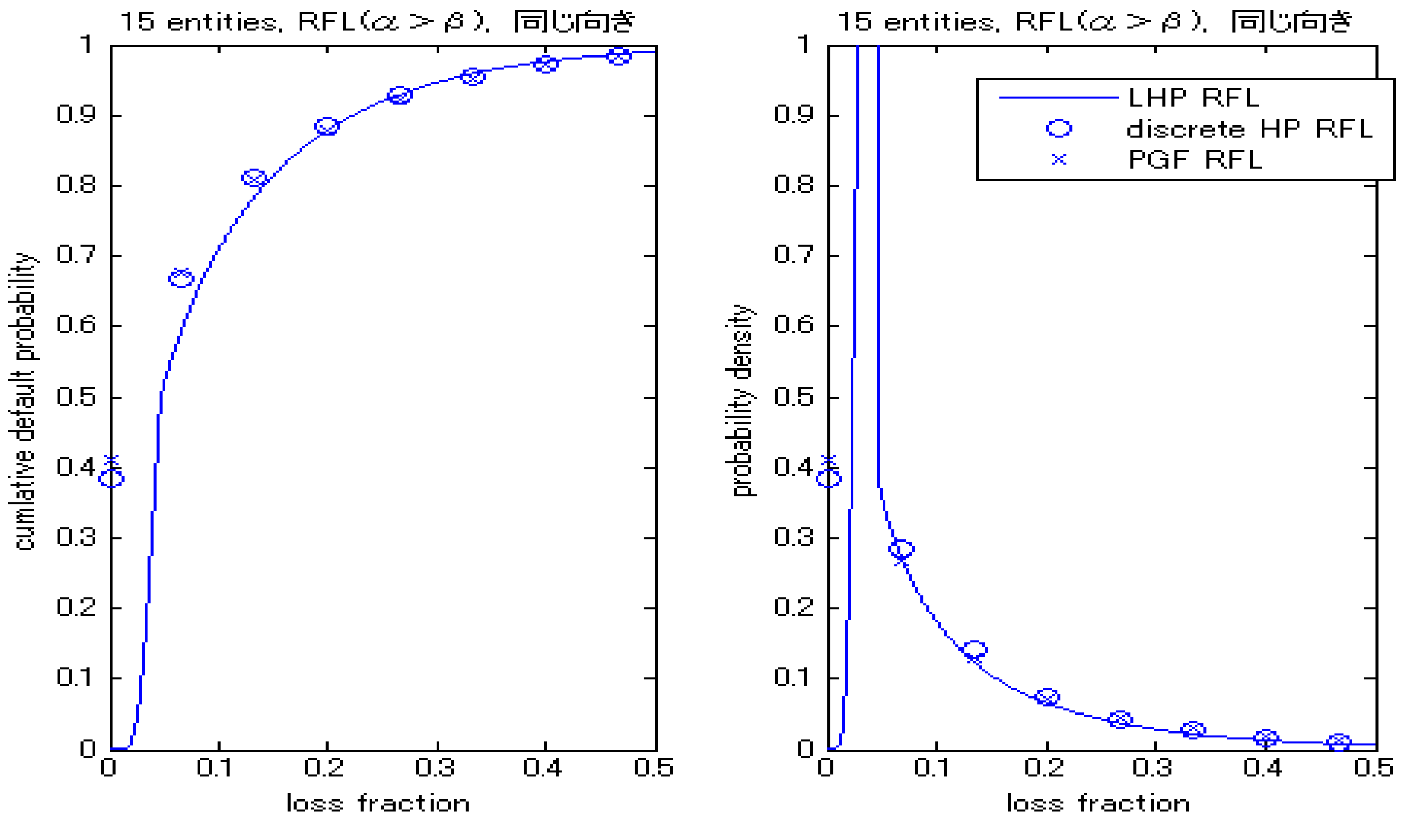




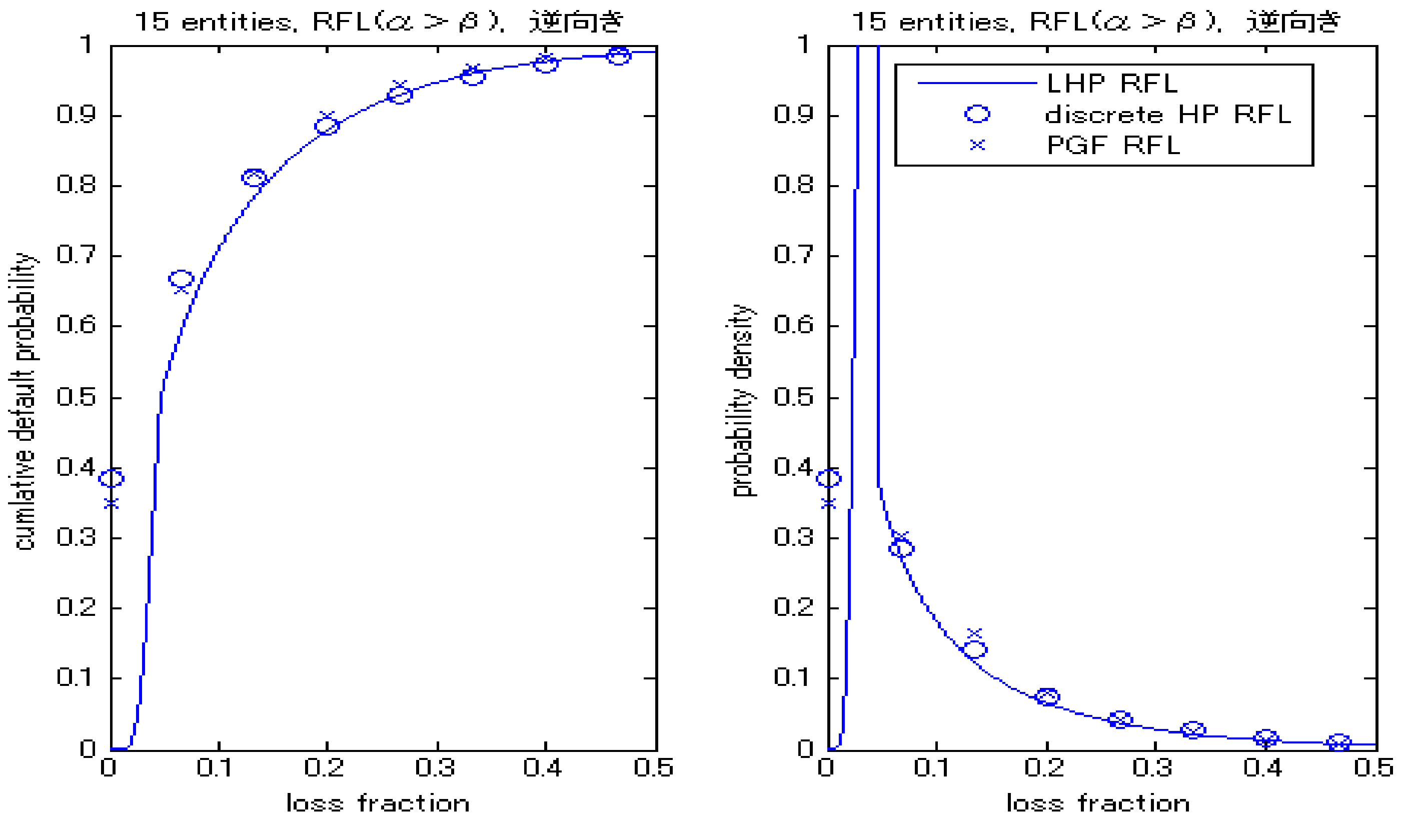
損失分布の比較②-3
(Gussian,逆向き)



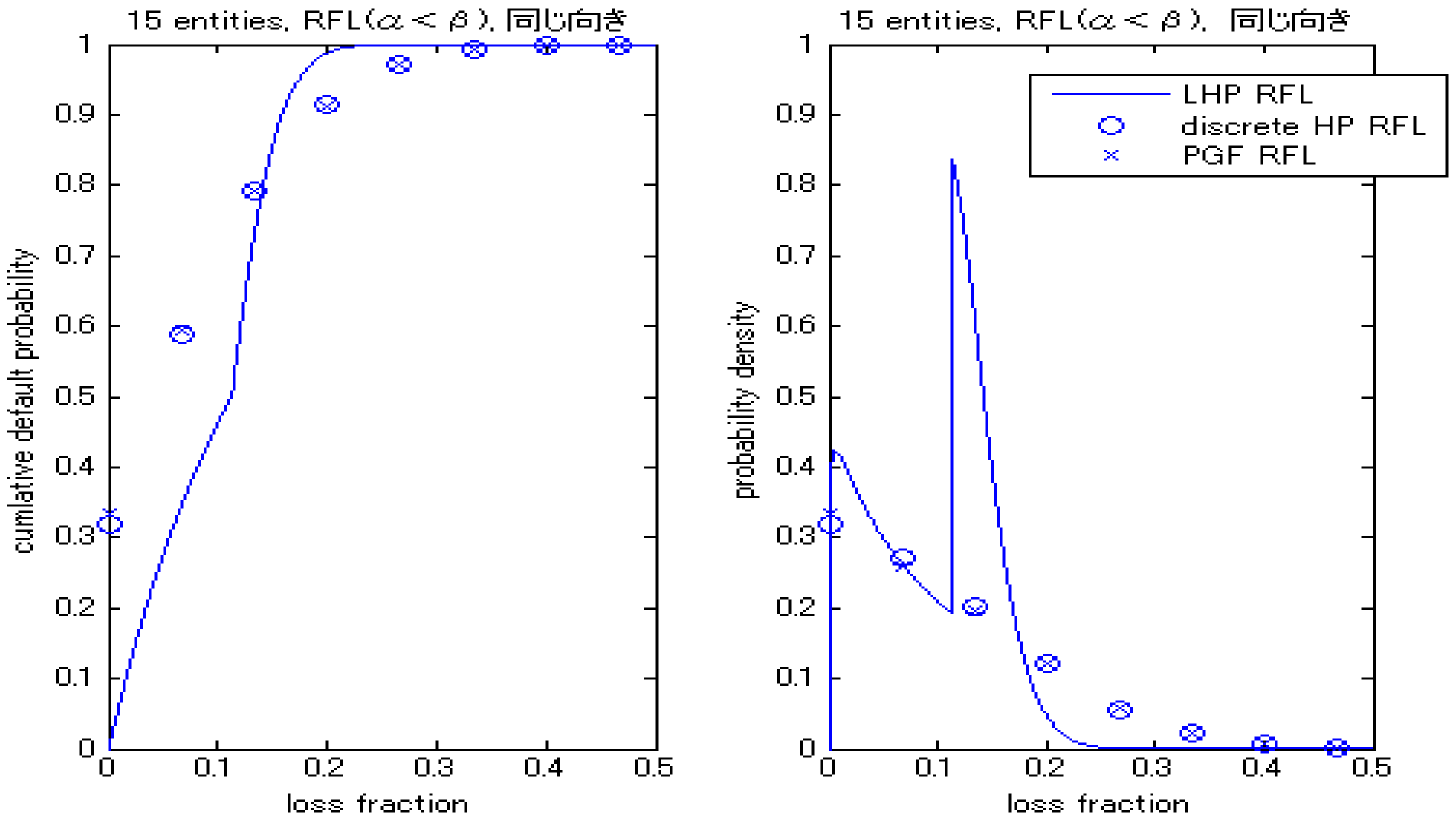
損失分布の比較②-3
(RFL(α > β),同じ向き)



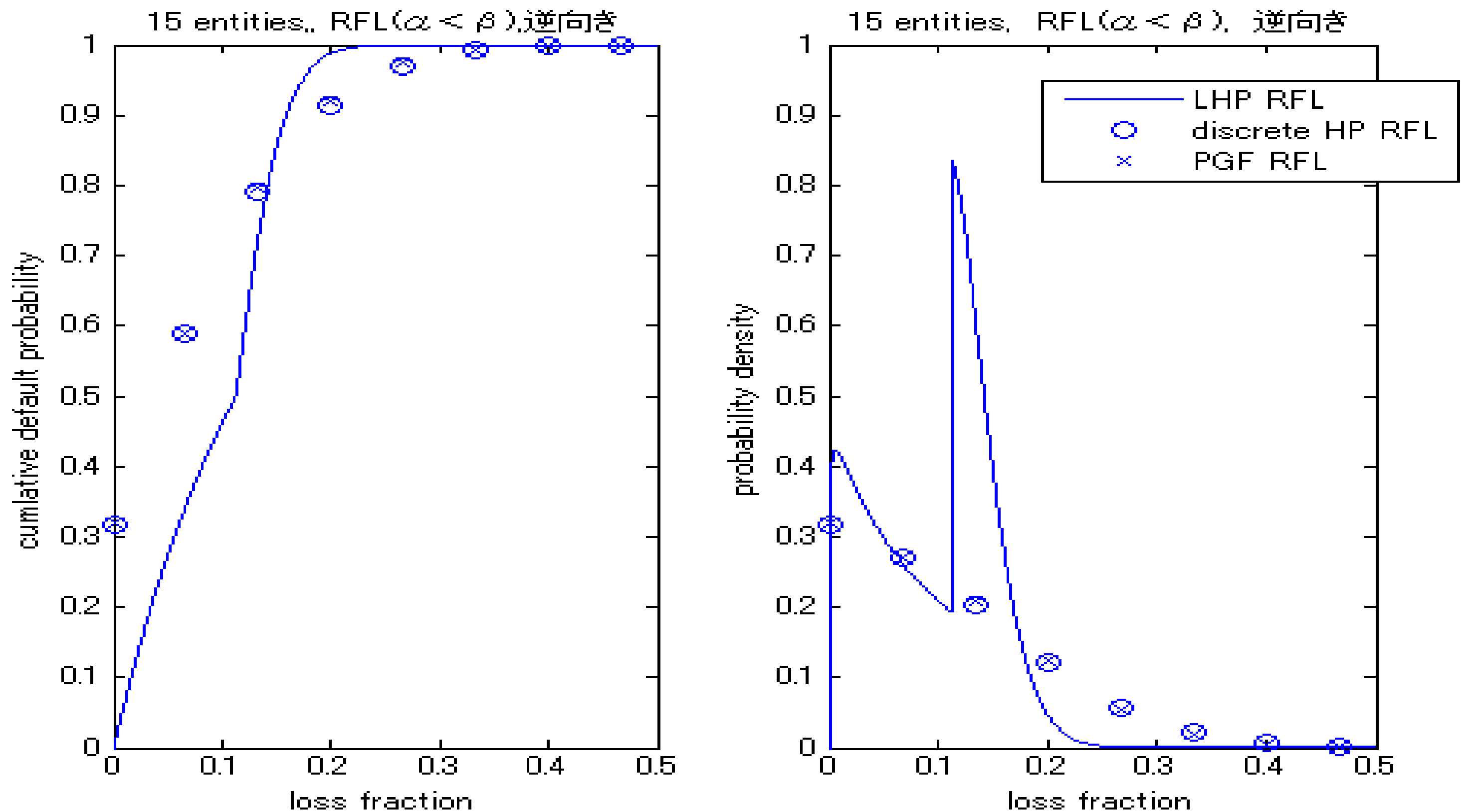
損失分布の比較②-3
(RFL(α > β),逆向き)



損失分布の比較②-3
(RFL(α < β),同じ向き)



損失分布の比較②-3
(RFL(α < β),逆向き)



まとめ

- RFLはGaussianと比較すると、最下位トランシェのプレミアムを高く評価する傾向がある
- 参照ポートフォリオの銘柄数が少ない場合、LHP近似は最下位トランシェのプレミアムを過大評価する
- (相関が一定の場合)周辺デフォルト確率のばらつきが大きいほど、ポートフォリオ全体の相関は減少する
- (周辺デフォルト確率が一定の場合)相関のばらつきが大きいほど、ポートフォリオ全体の相関は高まる
- 相関と周辺デフォルト確率が同じ方向に動いた場合は、ポートフォリオ全体の相関が高まる(逆方向に動くと全体の相関は減少する)