

テンソルを用いた経路依存型アメリカン オプションの評価手法

一橋大学国際企業戦略研究科 金融戦略コース

IM06F009 加藤 健介

研究の目的

経路依存型アメリカンオプションの価格評価において

テンソルを用いて、一般的な経路依存型アメリカンオプションに対する包括的な評価手法を構築する

アメリカン型ルックバックプットオプションの評価に、テンソルを用いた評価手法を適用することにより、適正なオプション価格を算出する

計算の効率化について、経路依存型アメリカンオプションの商品性の観点から考察を行う

経路依存型アメリカンオプション

➤ 代表的な商品

ルックバックオプション }
アジアンオプション } アメリカン型
バリアオプション }

強制転換条項付優先株式

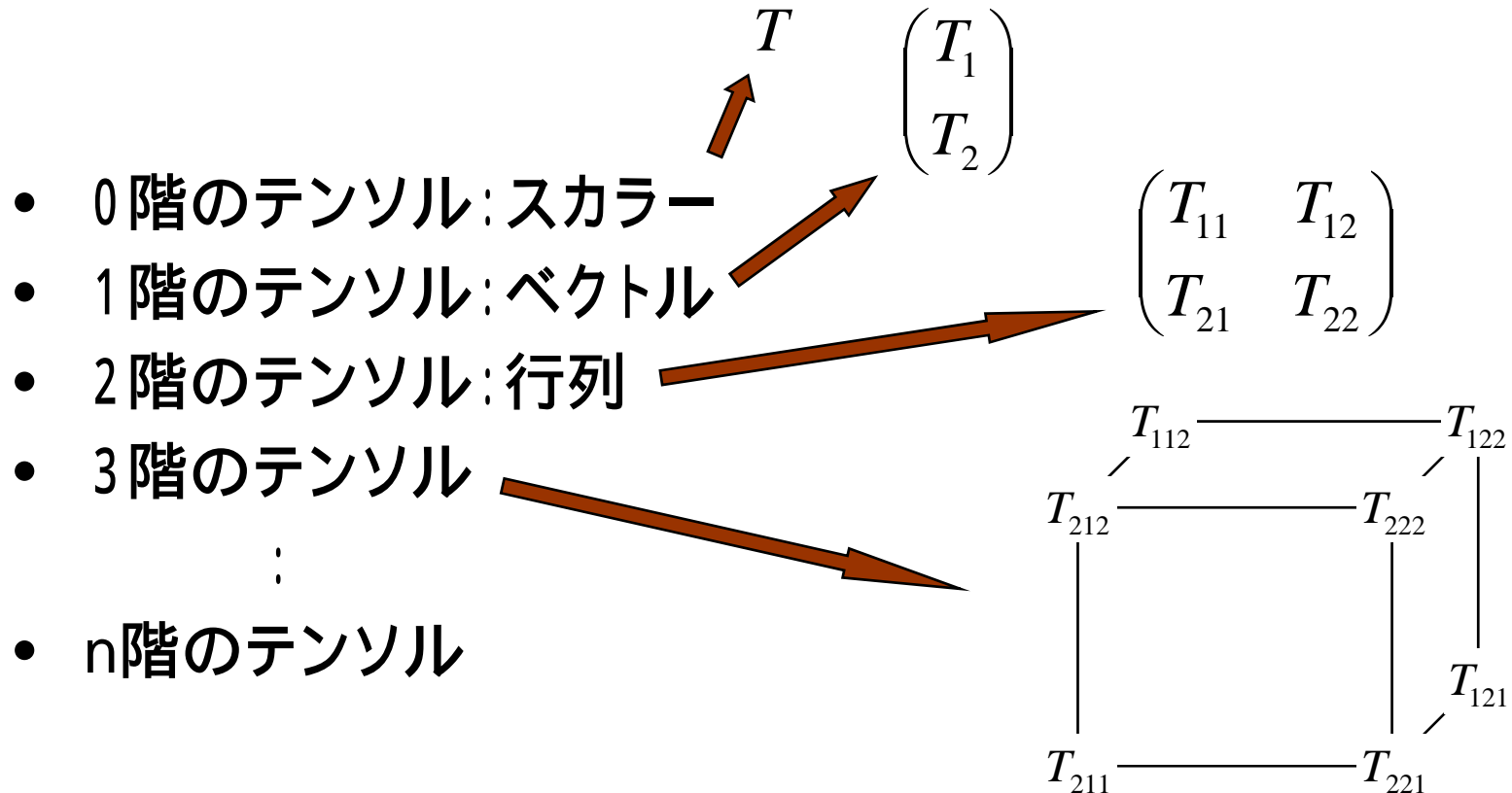
下方修正条項付転換社債

➤ 価格評価の一般的なアプローチ

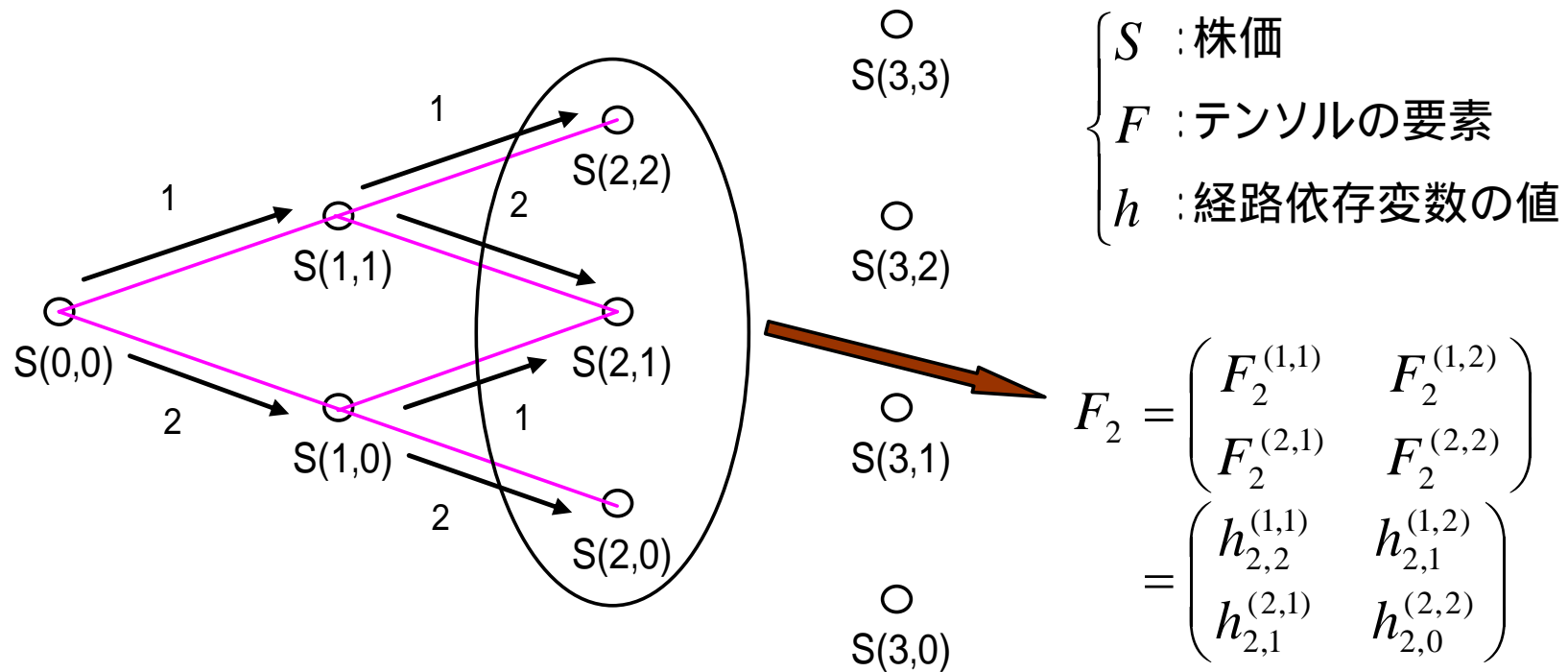
二項格子モデル : 格子が再結合しない }
モンテカルロ法 : 継続価値の評価が困難 } → 手法を
拡張

テンソル

➤ ベクトルを一般化したような量で、n階のテンソルはn個の指標を持つ

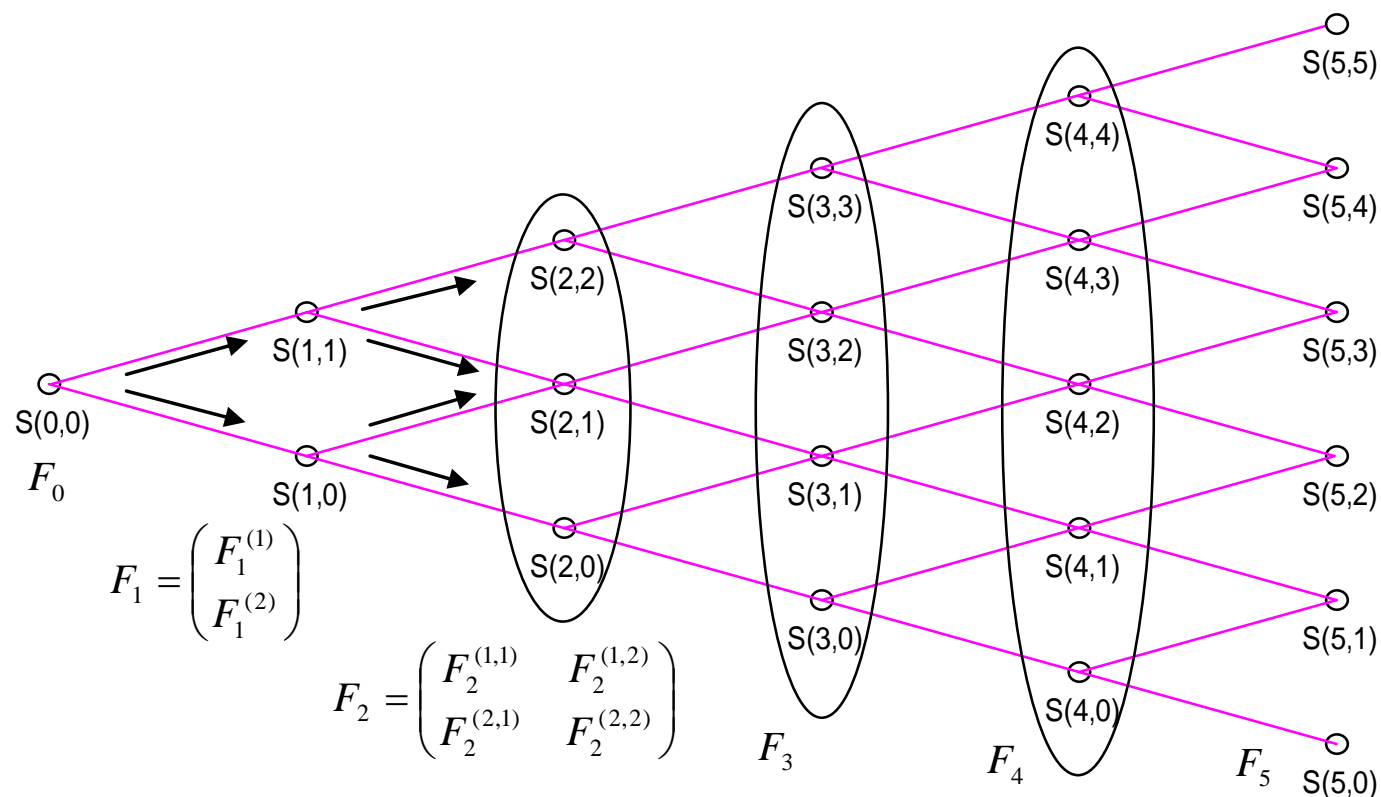


時点2に到達する株価のパスと テンソルの要素の対応関係



時点2に到達する4本の株価のパスがそれぞれ2階のテンソルの4つの要素に対応する

二項格子の時点とテンソルの対応関係



各時点に到達する全てのパスについて、時点毎に到達するパスの1本1本がテンソルの各要素に対応し、それぞれその時点に等しい階を持つテンソルが配置される

各時点における経路依存変数の テンソルを用いた表現

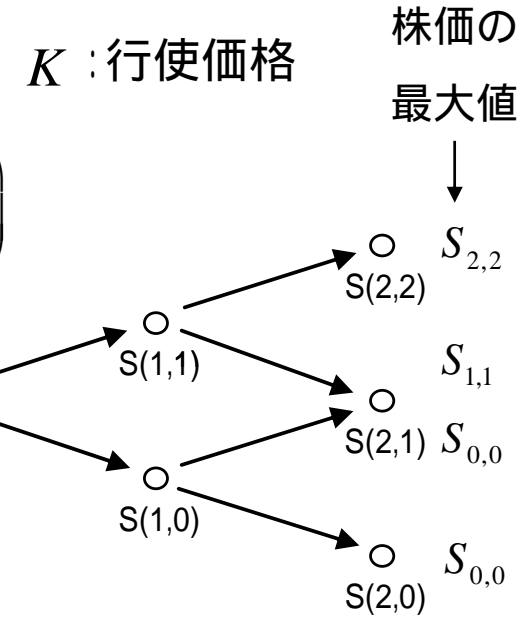
基本ベクトル $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ に対して、時点 i の経路依存変数 F_i は i 階のテンソル(次元数2)で表され、以下のようなになる

$$\begin{aligned}
 F_i &= F_i(\vec{e}_{x_0}, \dots, \vec{e}_{x_k}, \dots, \vec{e}_{x_{i-1}}) \\
 &= \sum_{x_0=1}^2 \dots \sum_{x_k=1}^2 \dots \sum_{x_{i-1}=1}^2 F_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})} \underbrace{\vec{e}_{x_0} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{x_k} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{x_{i-1}}}_{i \text{ 階のテンソルの基底}} \\
 &= \sum_{x_0=1}^2 \dots \sum_{x_k=1}^2 \dots \sum_{x_{i-1}=1}^2 h_{i,j}^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})} \vec{e}_{x_0} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{x_k} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{x_{i-1}}, \quad j = 2i - \sum_{k=0}^{i-1} x_k \\
 x_k &= 1, 2, \quad l_k = x_k + l_{k+1} - 2, \quad l_i = j, \quad 0 \leq k \leq i-1, 1 \leq i \leq N
 \end{aligned}$$

時点0の経路依存変数 F_0 はスカラーである

アメリカン型ルックバックプットオプション の時点2の行使価格

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \sum_{x_0=1}^2 \sum_{x_1=1}^2 K_2^{(x_0, x_1)} \vec{e}_{x_0} \otimes \vec{e}_{x_1} \\
 &= K_2^{(1,1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + K_2^{(2,1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + K_2^{(1,2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + K_2^{(2,2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} K_2^{(1,1)} & K_2^{(1,2)} \\ K_2^{(2,1)} & K_2^{(2,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{2,2}^{(1,1)} & h_{2,1}^{(1,2)} \\ h_{2,1}^{(2,1)} & h_{2,0}^{(2,2)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



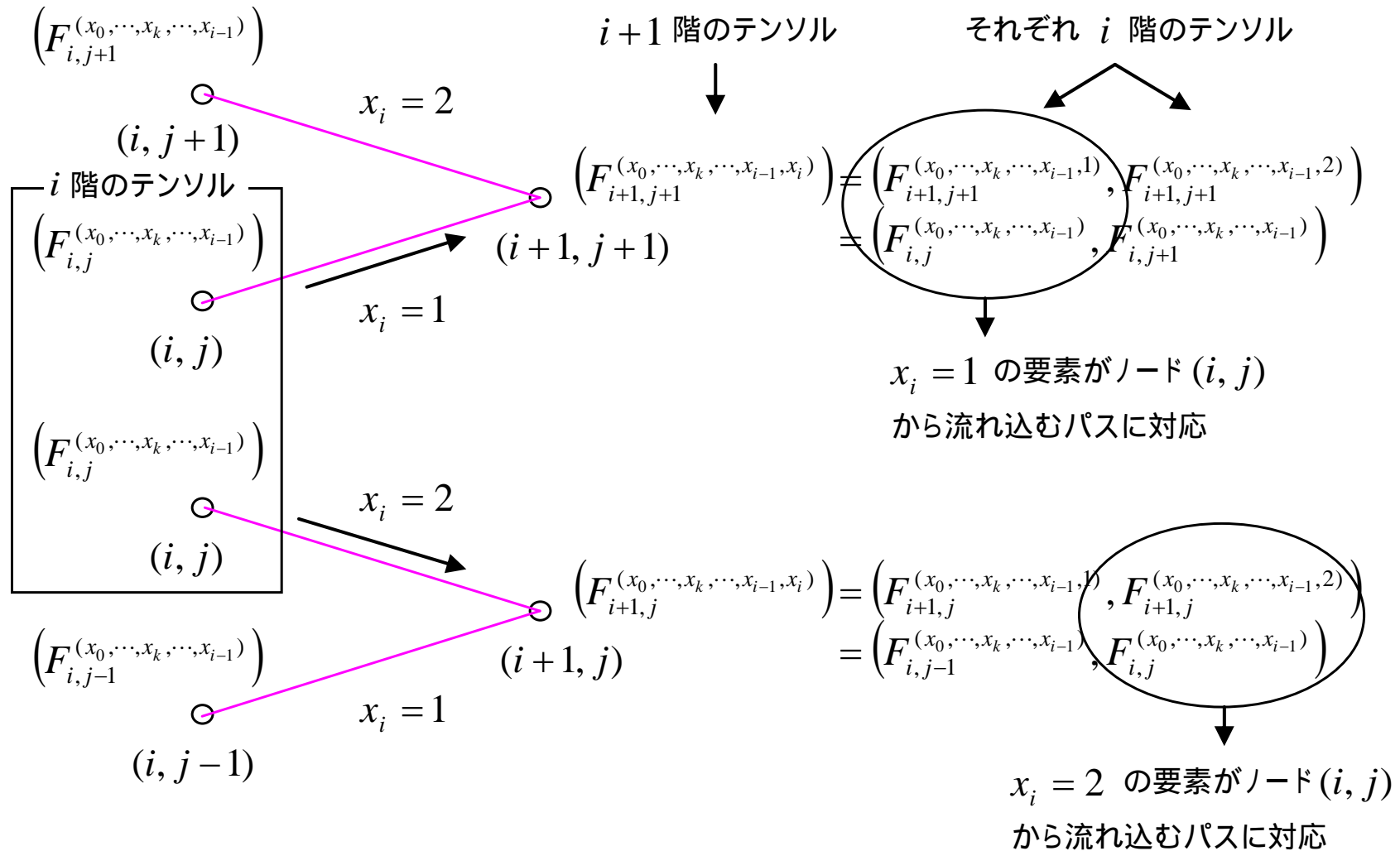
$$h_{2,j}^{(x_0, x_1)} = \max[S_{0,l_0}, S_{1,l_1}, S_{2,l_2}]$$

$$x_k = 1, 2, \quad l_k = x_k + l_{k+1} - 2, \quad l_2 = j, \quad j = 4 - (x_0 + x_1), \quad 0 \leq k \leq 1$$

$$\begin{cases}
 (x_0, x_1) = (1,1) : j = 2, l_2 = 2, l_1 = 1, l_0 = 0 \\
 (x_0, x_1) = (2,1) : j = 1, l_2 = 1, l_1 = 0, l_0 = 0 \\
 (x_0, x_1) = (1,2) : j = 1, l_2 = 1, l_1 = 1, l_0 = 0 \\
 (x_0, x_1) = (2,2) : j = 0, l_2 = 0, l_1 = 0, l_0 = 0
 \end{cases}$$

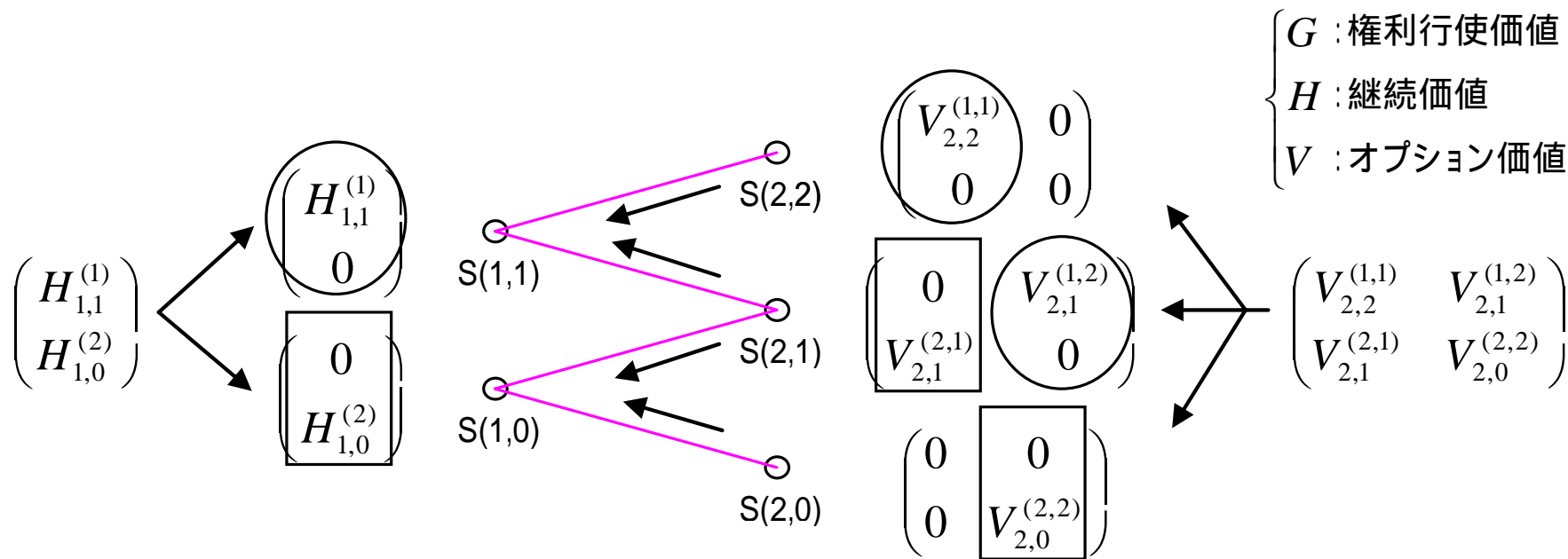
$$\therefore K_2 = \begin{pmatrix} K_2^{(1,1)} & K_2^{(1,2)} \\ K_2^{(2,1)} & K_2^{(2,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{2,2} & S_{1,1} \\ S_{0,0} & S_{0,0} \end{pmatrix}$$

1時点先の上下のノードに流れ込むパスとテンソルの要素の関係



時点1におけるバックワード計算

～ テンソルの要素を各ノードに分割～



$$H_{1,1} = \begin{pmatrix} H_{1,1}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-r\Delta t} \left\{ p \begin{pmatrix} V_{2,2}^{(1,1)} \\ 0 \end{pmatrix} + (1-p) \begin{pmatrix} V_{2,1}^{(1,2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{1,1} = \begin{pmatrix} V_{1,1}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max[G_{1,1}^{(1)}, H_{1,1}^{(1)}] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} = e^{-r\Delta t} \left\{ p \begin{pmatrix} 0 \\ V_{2,1}^{(2,1)} \end{pmatrix} + (1-p) \begin{pmatrix} 0 \\ V_{2,0}^{(2,2)} \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \max[G_{1,0}^{(2)}, H_{1,0}^{(2)}] \end{pmatrix}$$

時点1におけるバックワード計算

～ テンソルの要素を時点毎に集約～

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} H_{1,1}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \circ \\
 S(1,1) \\
 \circ \\
 S(1,0) \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ H_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} \\
 \circ \\
 S(2,0) \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{2,0}^{(2,2)} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} V_{2,2}^{(1,1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \circ \\
 S(2,2) \\
 \circ \\
 S(2,1) \\
 \begin{pmatrix} 0 & V_{2,1}^{(1,2)} \\ V_{2,1}^{(2,1)} & 0 \end{pmatrix} \\
 \circ \\
 S(2,0) \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{2,0}^{(2,2)} \end{pmatrix}
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} H_{1,1}^{(1)} \\ H_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} \\
 \circ \\
 S(1) \\
 \circ \\
 S(2) \\
 \begin{pmatrix} V_{2,2}^{(1,1)} & V_{2,1}^{(1,2)} \\ V_{2,1}^{(2,1)} & V_{2,0}^{(2,2)} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_{1,1}^{(1)} \\ H_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} = e^{-r\Delta t} \left\{ p \begin{pmatrix} V_{2,2}^{(1,1)} \\ V_{2,1}^{(2,1)} \end{pmatrix} + (1-p) \begin{pmatrix} V_{2,1}^{(1,2)} \\ V_{2,0}^{(2,2)} \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} V_{1,1}^{(1)} \\ V_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max[G_{1,1}^{(1)}, H_{1,1}^{(1)}] \\ \max[G_{1,0}^{(2)}, H_{1,0}^{(2)}] \end{pmatrix}$$

評価手法上は、経路依存変数を各時点で集約した状態で
バックワード計算を行う

各時点におけるテンソルの バックワード計算

各時点において、テンソルで表される継続価値、オプション価値は、以下のバックワード計算により求められる

$$H_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})} = e^{-r\Delta t} \{ pV_{i+1}^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1}, 1)} + (1-p)V_{i+1}^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1}, 2)} \}$$

$$V_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})} = \max[G_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})}, H_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})}]$$

$$x_k = 1, 2, \quad 0 \leq k \leq i-1, 1 \leq i \leq N$$

但し、満期 N のオプション価値は以下の通り

$$V_N^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{N-1})} = \max[G_N^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{N-1})}, 0]$$

アメリカン型ルックバックプットオプション の価格評価

$$F_i = \sum_{x_0=1}^2 \cdots \sum_{x_k=1}^2 \cdots \sum_{x_{i-1}=1}^2 \underbrace{F_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})}}_{\substack{\text{株価 } S_i \\ \text{行使価格 } K_i \\ \text{権利行使価値 } G_i \\ \text{継続価値 } H_i \\ \text{オプション価値 } V_i}} \vec{e}_{x_0} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{x_k} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{x_{i-1}}$$

・株価 S_i

・行使価格 K_i

・権利行使価値 G_i

・継続価値 H_i

・オプション価値 V_i

$$S_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})} = S_{i,j} = S_{0,0} u^j d^{i-j}$$

$$K_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})} = \max[\max_{0 \leq k \leq i-1} [S_{k,l_k}], S_{i,j}]$$

$$G_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})} = K_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})} - S_{i,j}$$

$$H_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})} = e^{-r\Delta t} \{ p V_{i+1}^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1}, 1)} + (1-p) V_{i+1}^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1}, 2)} \}$$

$$V_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})} = \max[G_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})}, H_i^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{i-1})}]$$

但し、満期のオプション価値は以下の通り

$$V_N^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{N-1})} = \max[G_N^{(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{N-1})}, 0]$$

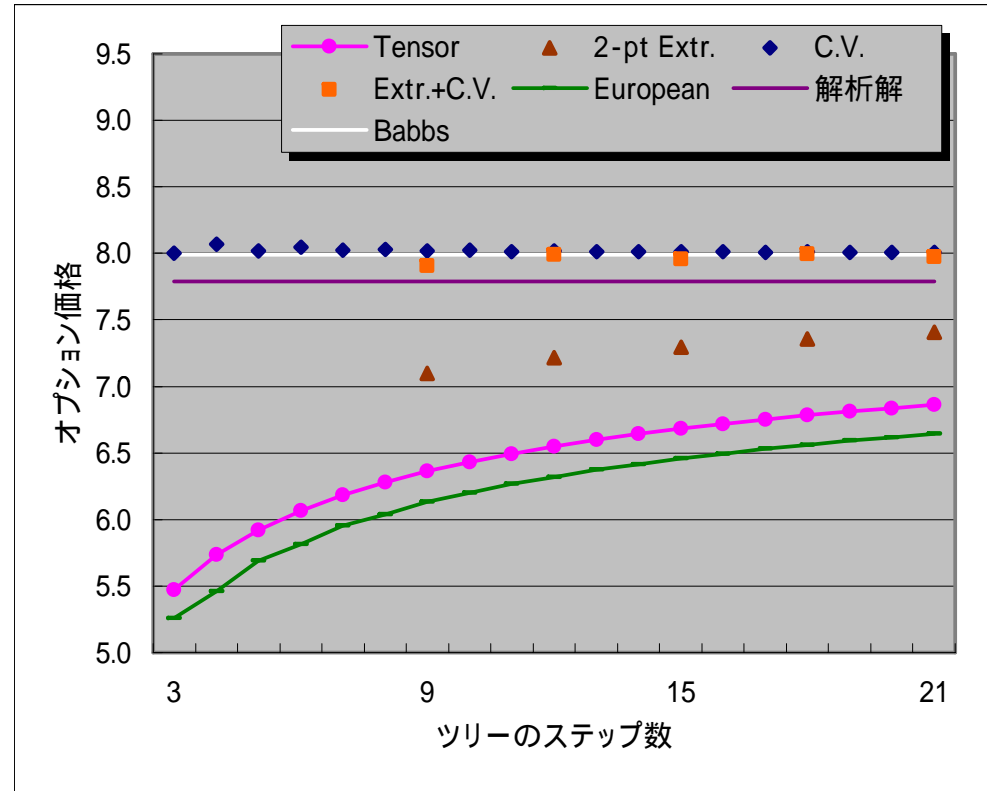
プライシングの条件

- 株価 : 50.00
- リスクフリーレート : 10.0%
- 株価のボラティリティ : 40.0%
- オプション期間 : 0.25年

Hull and White(1993)と同一の条件とする

テンソルを用いた手法による評価結果

Step数	Tensor	2-pt Extr.	C.V.	Extr.+C.V.
3	5.47	-	8.00	-
4	5.74	-	8.07	-
5	5.92	-	8.02	-
6	6.07	-	8.04	-
7	6.19	-	8.02	-
8	6.28	-	8.03	-
9	6.36	7.10	8.02	7.91
10	6.43	-	8.03	-
11	6.49	-	8.01	-
12	6.55	7.22	8.02	7.99
13	6.60	-	8.01	-
14	6.64	-	8.02	-
15	6.68	7.29	8.01	7.95
16	6.72	-	8.01	-
17	6.75	-	8.01	-
18	6.78	7.36	8.01	7.99
19	6.81	-	8.01	-
20	6.84	-	8.01	-
21	6.86	7.41	8.01	7.98

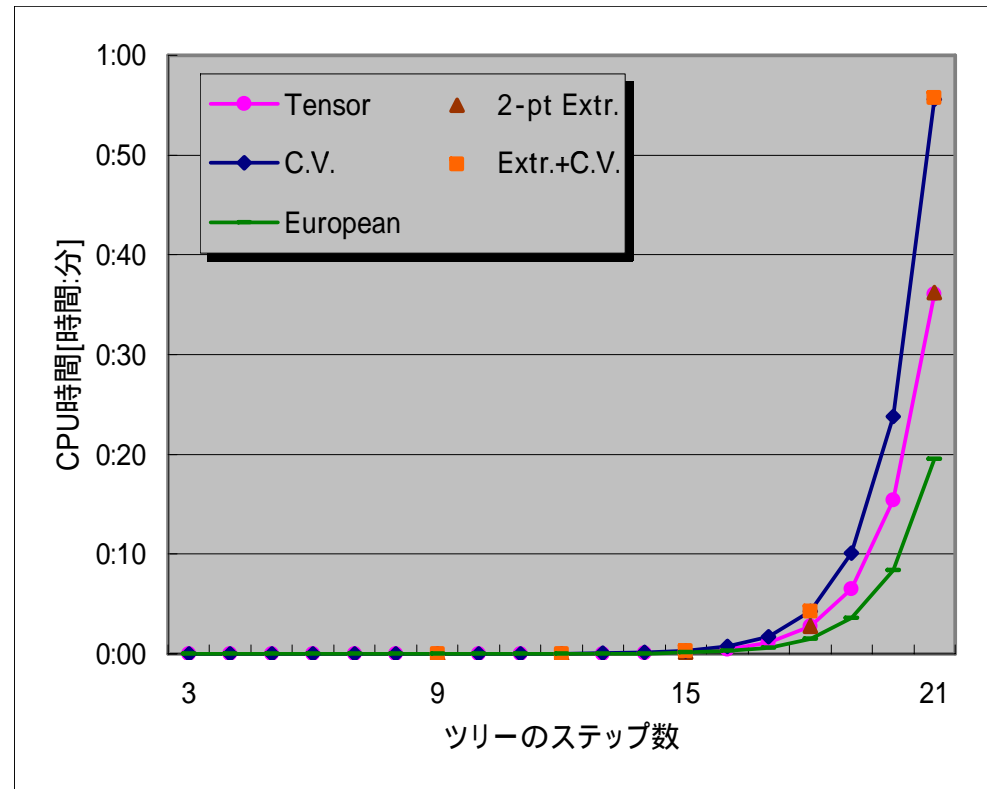


Babbs(2000)によるステップ数4,500での評価結果7.99を
オプション価格の収束先として設定

テンソルを用いた手法の計算負荷

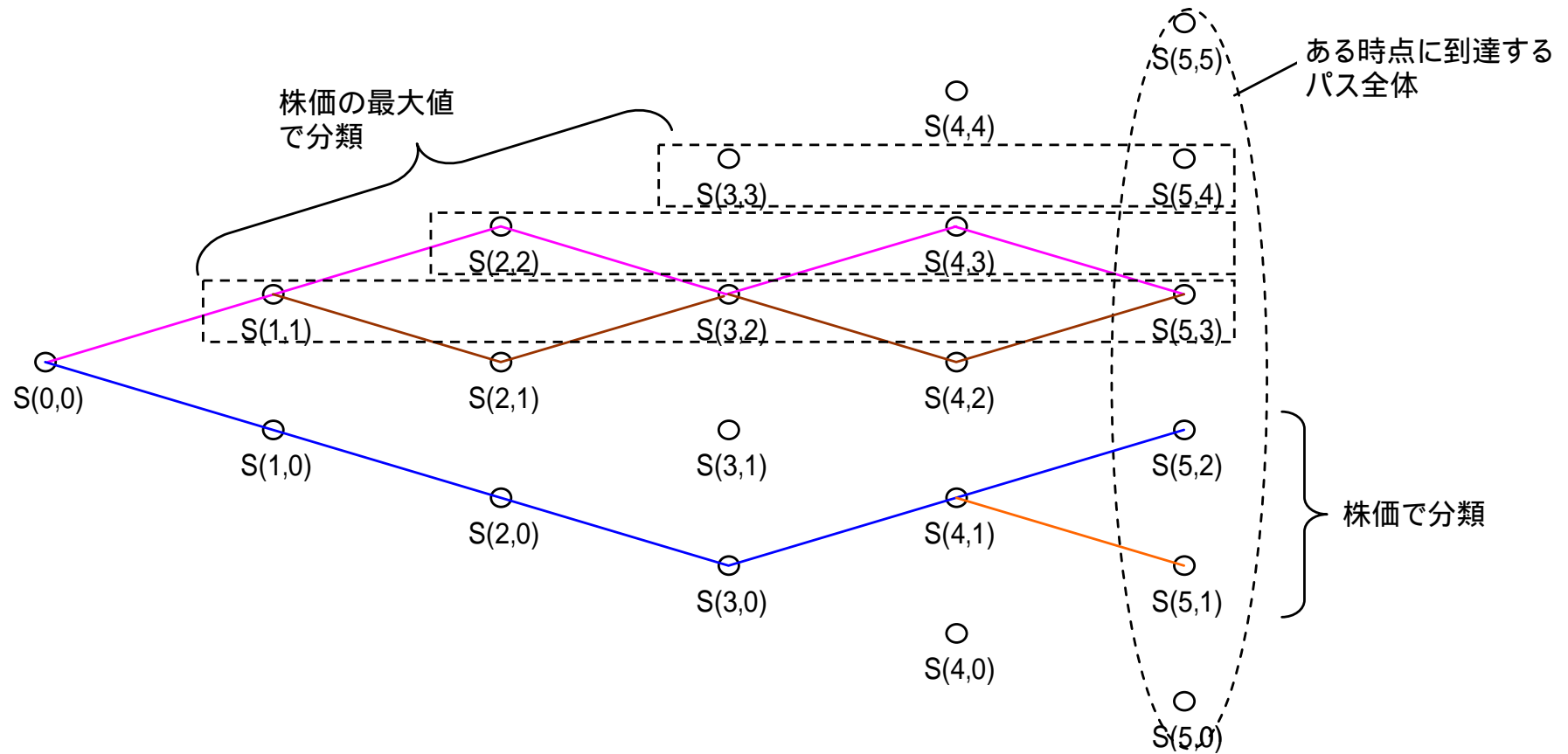
単位: h:mm:ss

Step数	Tensor	2-pt Extr.	C.V.	Extr.+C.V.
3	0:00:00	-	0:00:00	-
4	0:00:00	-	0:00:00	-
5	0:00:00	-	0:00:00	-
6	0:00:00	-	0:00:00	-
7	0:00:00	-	0:00:00	-
8	0:00:00	-	0:00:00	-
9	0:00:00	0:00:00	0:00:00	0:00:00
10	0:00:00	-	0:00:00	-
11	0:00:00	-	0:00:00	-
12	0:00:01	0:00:01	0:00:02	0:00:02
13	0:00:02	-	0:00:03	-
14	0:00:05	-	0:00:07	-
15	0:00:11	0:00:11	0:00:18	0:00:18
16	0:00:29	-	0:00:45	-
17	0:01:08	-	0:01:46	-
18	0:02:46	0:02:47	0:04:18	0:04:20
19	0:06:35	-	0:10:11	-
20	0:15:32	-	0:23:58	-
21	0:36:23	0:36:28	0:56:02	0:56:09



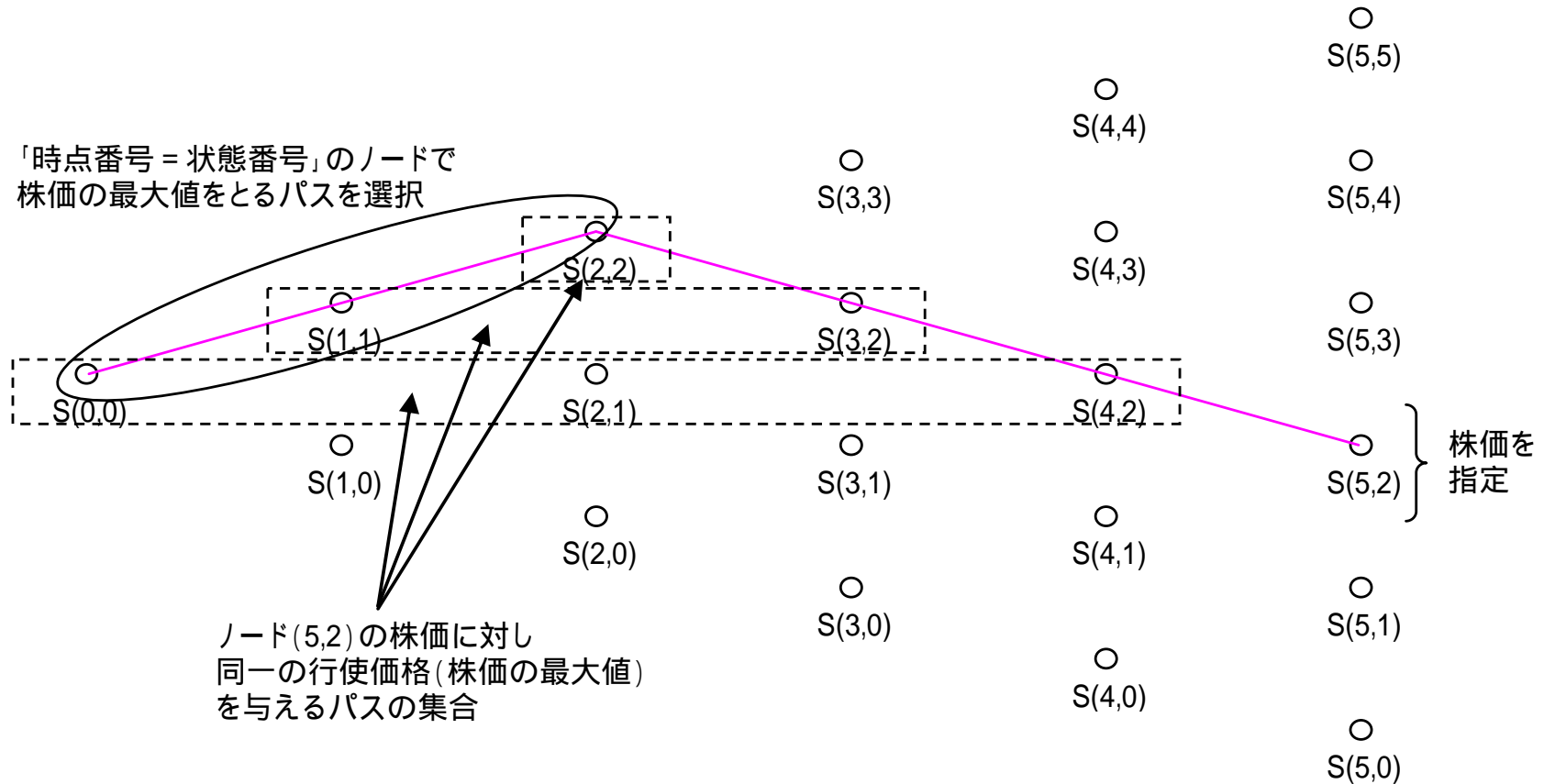
・Core2Duo 1.86GHz , メモリ 1GB , C++での計算時間

計算の効率化



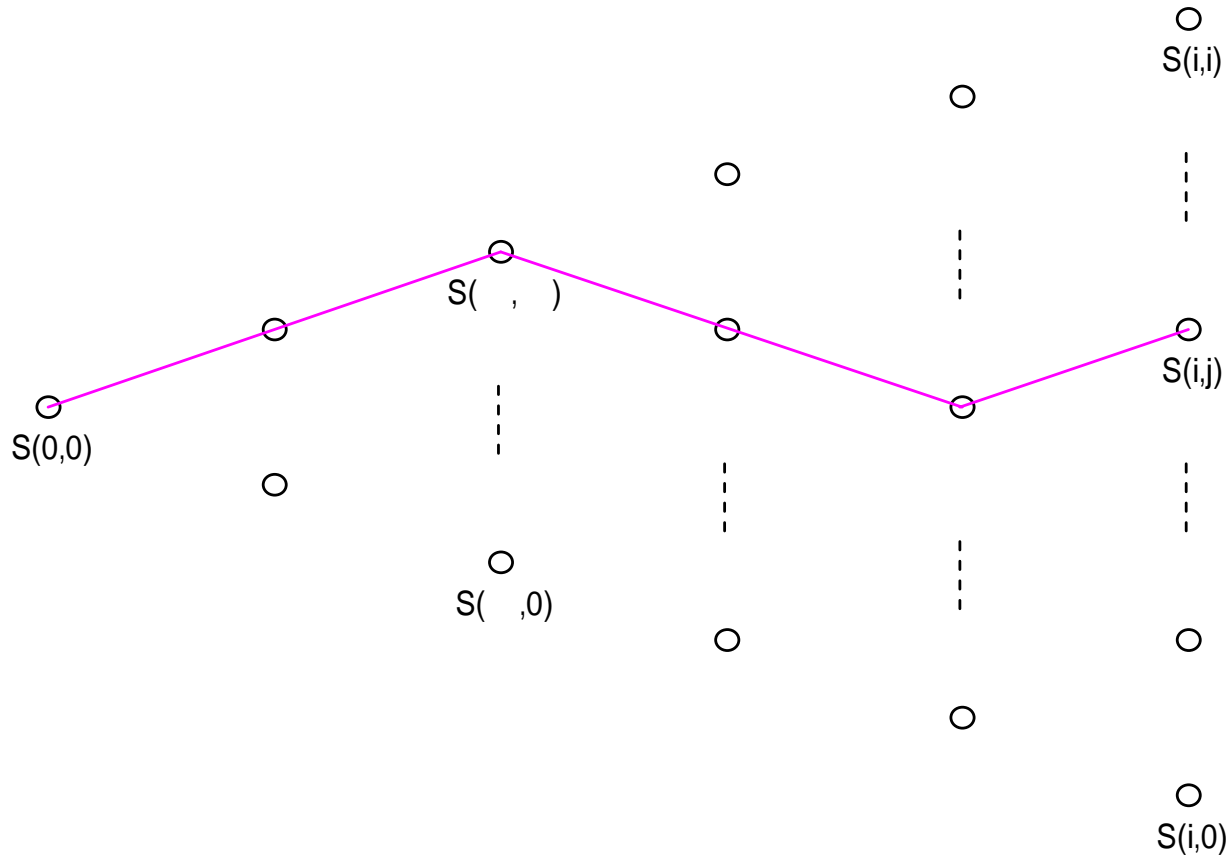
同一の株価 / 行使価格の組に対応するオプション価値は全て等しいので、その中からパスを1本選び、1回ずつ計算を行うことにより計算を効率化する

ノード(5,2)における同一の株価 / 行使価格の組を与えるパス



ノード(5,2)では、行使価格(株価の最大値)として $j=i$ の
ノードの株価 $S_{0,0}, S_{1,1}, S_{2,2}$ の3つの値をとることができる

同一の株価 / 行使価格の組を 与えるパスの代表値の設定



$j = i$ のノードで株価の最大値をとり、それ以降の経路では、
 $j = i$ のノードの株価を上回らないようにパスを設定する

株価 / 行使価格の分布

～ ステップ数20, 時点17～

行使価格	107																	1
	102																1	
	98														1	16		
	94													1	16			
	89												1	16	119			
	86												1	16	119			
	82											1	16	119	544			
	78										1	16	119	544				
	75									1	16	119	544	1700				
	72								1	16	119	544	1700					
	68							1	16	119	544	1700	3808					
	65						1	16	119	544	1700	3808						
	63					1	16	119	544	1700	3808	6188						
	60				1	16	119	544	1700	3808	6188							
	57			1	16	119	544	1700	3808	6188	7072							
	55		1	16	119	544	1700	3808	6188	7072								
	52	1	16	119	544	1700	3808	6188	7072	4862								
50	1	16	119	544	1700	3808	6188	7072	4862									
	23	26	28	31	33	37	40	44	48	52	57	63	68	75	82	89	98	107
	株価																	

・表の数字はパス数, 色付のセルは行使のパスを表す

計算負荷の削減効果

～ステップ数20, 時点17～

行使価格

107																		1
102																	1	
98															1	1		
94														1	1			
89													1	1	1			
86												1	1	1				
82											1	1	1	1				
78										1	1	1	1					
75									1	1	1	1	1					
72								1	1	1	1	1						
68							1	1	1	1	1	1						
65						1	1	1	1	1	1							
63					1	1	1	1	1	1	1							
60				1	1	1	1	1	1	1	1							
57			1	1	1	1	1	1	1	1								
55		1	1	1	1	1	1	1	1									
52	1	1	1	1	1	1	1	1	1									
50	1	1	1	1	1	1	1	1										
	23	26	28	31	33	37	40	44	48	52	57	63	68	75	82	89	98	107

株価

時点17での計算負荷は、約13万回から90回に削減される

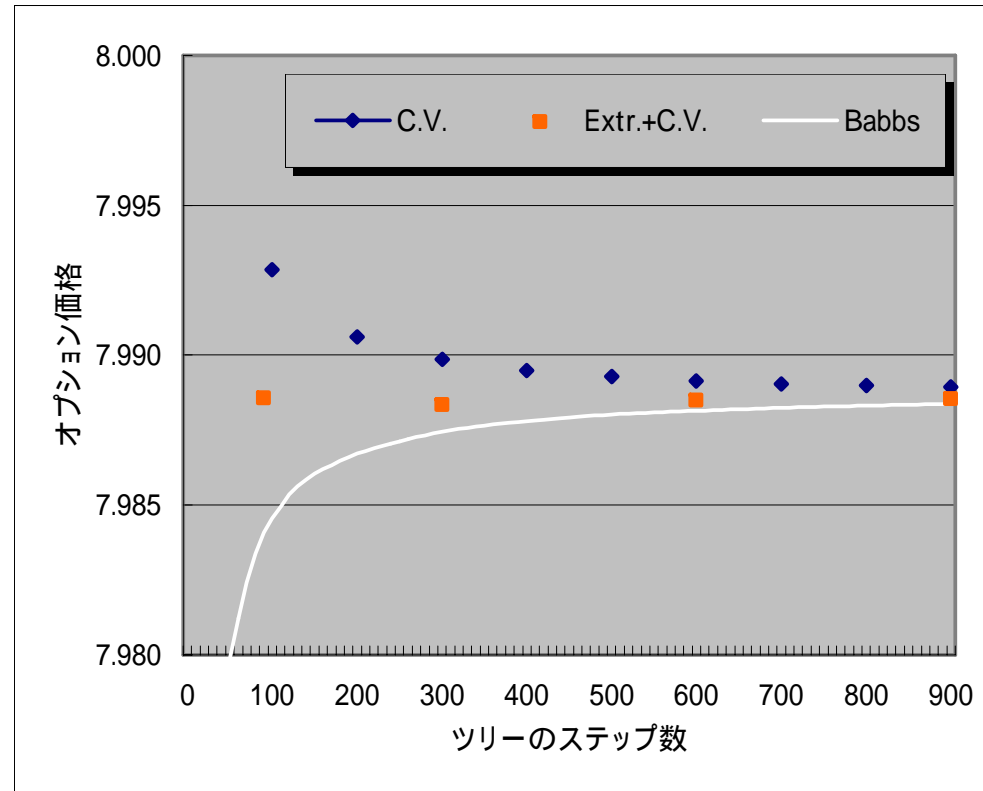
計算の効率化を行った場合の評価結果

Step数	Tensor	C.V.	Extr.+C.V.
10	6.43	-	-
100	7.44	7.993	-
200	7.59	7.991	-
300	7.66	7.990	7.988
400	7.71	7.989	-
500	7.74	7.989	-
600	7.76	7.989	7.988
700	7.77	7.989	-
800	7.79	7.989	-
900	7.80	7.989	7.989

Extr.+C.V.とBabbs (2000)との比較

Step数	Extr.+C.V.	差分
90	7.98856	-0.00018
300	7.98835	-0.00038
900	7.98854	-0.00020

Step数	Babbs
4,500	7.98874

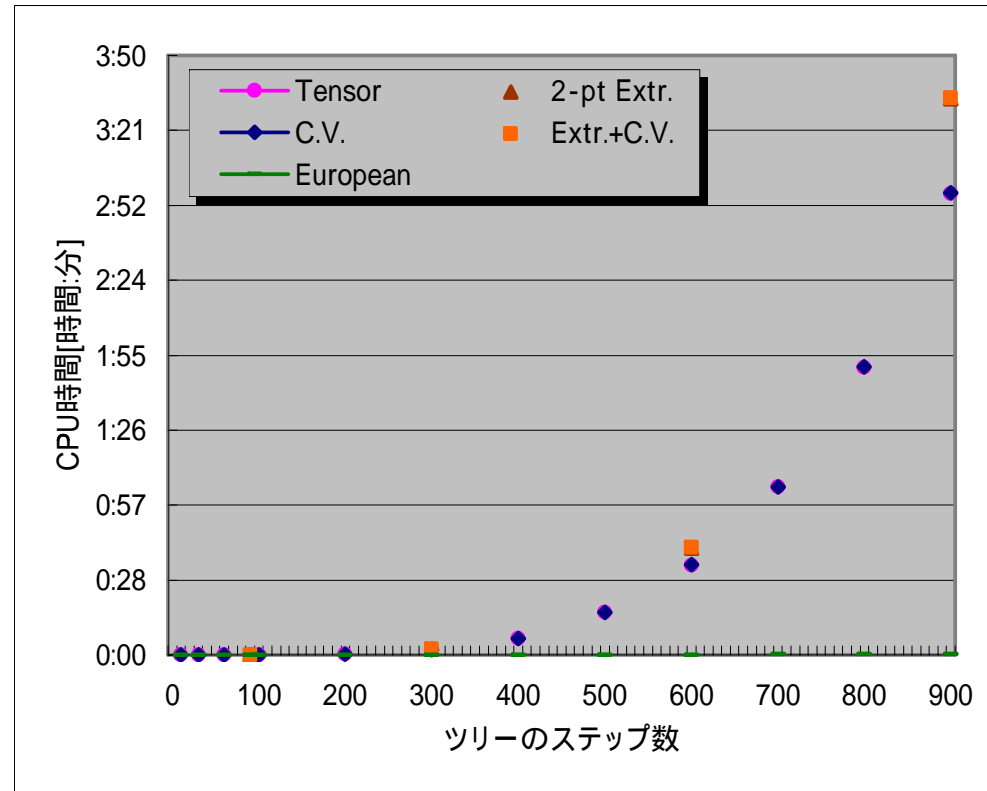


リチャードソン外挿法と制御変数法を組み合わせた手法は、ステップ数90で、Babbs (2000) のステップ数4,500とほぼ等しいオプション価格を算出している

計算の効率化を行った場合の計算負荷

単位: h:mm:ss

Step数	Tensor	2-pt Extr.	C.V.	Extr.+C.V.
90	0:00:01	0:00:02	0:00:01	0:00:02
100	0:00:01	-	0:00:01	-
200	0:00:23	-	0:00:23	-
300	0:01:56	0:02:20	0:01:56	0:02:20
400	0:06:15	-	0:06:17	-
500	0:16:19	-	0:16:23	-
600	0:34:31	0:41:09	0:34:38	0:41:18
700	1:04:25	-	1:04:35	-
800	1:50:27	-	1:50:42	-
900	2:57:14	3:33:41	2:57:35	3:34:09



リチャードソン外挿法と制御変数法を組み合わせた手法は、ステップ数90で、計算時間は2秒程度であることから、実務的に十分使用可能

まとめ

テンソルを用いて一般的な経路依存型アメリカンオプションを評価するための包括的なプライシング手法を構築したこと

アメリカン型ルックバックプットオプションの評価に本評価手法を適用し、リチャードソン外挿法と制御変数法を用いて収束性を向上させることで、適正なオプション価格を算出したこと

商品性の観点から、計算の効率化を行ったこと