

高速フーリエ変換による CreditRisk+ の計算と その動的な振舞

一橋大学国際企業戦略研究科
金融戦略コース

im06f028 小澤 栄作

研究の目的と結果

目的

信用リスク管理のモデルであるCreditRisk+ タイプのモデルについて、評価、吟味する。

結果

高速フーリエ変換を用いた計算手法の一つを提案した
ポアソン近似の効果について評価を行い、一定の場合に無視
できない誤差が生ずることを見た。

モデルが暗に仮定する依存関係を動学コピュラの観点から解
釈した。

高速フーリエ変換による分布の計算

モデル

債務者 j が時刻 T までにデフォルトする確率

$$1 - e^{-\Lambda_j T}$$
$$\Lambda_j = p_j R$$

ここで R は全債務者に共通で平均1のガンマ分布に従うと仮定。
ポートフォリオの損失額

$$Z = \sum_{j=1}^N l_j X_T^j$$

ここで l_j は債務者 j のデフォルト時の損失額, X_T^j は債務者 j のデフォルト特性関数

損失分布の特性関数

Zに関する特性関数

$$\Phi_Z(s) = E[e^{isZ}] = E\left[\exp\left(is \sum_{j=1}^N l_j X_T^j\right)\right]$$

Rが所与のとき各デフォルト事象は独立

$$\begin{aligned}\Phi_Z(s) &= E\left[E\left[\exp\left(is \sum_{j=1}^N l_j X_T^j\right) \middle| R\right]\right] = E\left[\prod_{j=1}^N E\left[e^{isl_j X_T^j} \middle| R\right]\right] \\ &= E\left[\prod_{j=1}^N \Phi_{X_T^j|R}(sl_j)\right]\end{aligned}$$

$$\Phi_{X_T^j|R}(sl_j) = e^{isl_j} (1 - e^{-\Lambda_j T}) + e^{-\Lambda_j T} = (1 - e^{isl_j}) e^{-\Lambda_j T} + e^{isl_j}$$

損失分布の特性関数

債務者が同一のとき

$$\begin{aligned}\Phi_Z(s) &= \mathbb{E}\left[\left((1 - e^{isl})e^{-\Lambda T} + e^{isl}\right)^N\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} C_n A^n e^{-npTR} B^{N-n}\right] \\ &= \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} C_n A^n B^{N-n} \left(1 + npT\sigma^2\right)^{-1/\sigma^2}\end{aligned}$$

ポアソン近似

$$\begin{aligned}\Phi_{X_T^j|R}(sl_j) &\approx \exp(\Lambda_j T (e^{isl_j} - 1)) \\ \Phi_Z(s) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(RT \sum_{j=1}^N p_j (e^{isl_j} - 1)\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \ln\left(1 - \sigma^2 \sum_{j=1}^N p_j T (e^{isl_j} - 1)\right)\right)\end{aligned}$$

フーリエ変換

フーリエ変換

$$F(s') = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i2\pi s'x} dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s') e^{-i2\pi s'x} ds'$$

離散フーリエ変換($x_k = k\Delta x$, $s'_n = n/(N\Delta x)$, $k, n = 0, \dots, N-1$)

$$F(s'_n) = \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} nk} f(x_k), \quad f(x_k) = \Delta s' \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} F(s'_n)$$

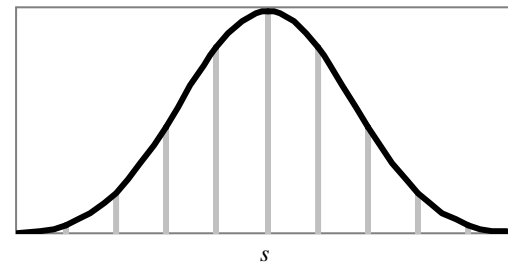
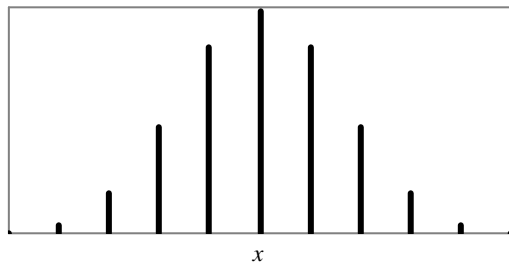
高速フーリエ変換(FFT)

離散フーリエ変換を $O(N^2)$ ではなく $O(N \log_2 N)$ で計算するアルゴリズム

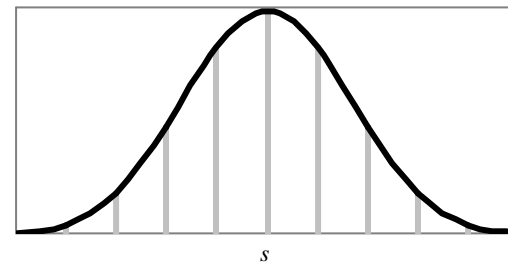
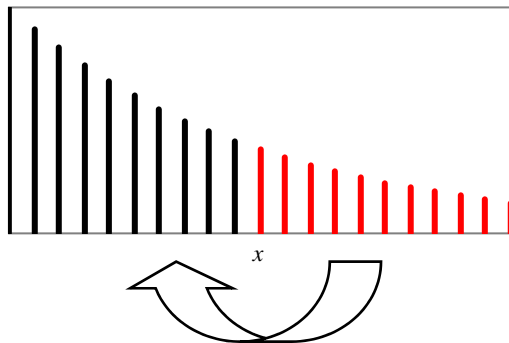
N は2のべき乗にする必要がある

サンプル数 N の影響

N が足りている



N が足りない



FFTの適用

損失額が有限であれば、適当な N をとることによりすべての場合をカバーできる(N が大きすぎるときには適当な単位に丸める).

このとき、逆変換の式は厳密に成り立ち、正確な確率を計算できるFFTを適用するためには $N=2^n$ にする必要がある.

ポアソン近似を行わない場合

${}_N C_n$ のような計算が必要になるため $N=30$ 程度が限界.

ポアソン近似を行う場合

N が大きくても計算可能.

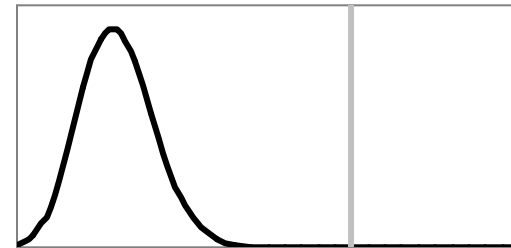
ただし、損失額の分布が有限でなくなる.

分布が無限になることによる誤差は、ポアソン近似を行うことによる誤差と比較して非常に小さい

計算方法

(主要な)損失額が格子点に乗るように
損失額の単位(Δx)と N を決定する.

例) 損失額の単位: 1百万円
 $N=2^{15}$ (=32,768百万円)



特性関数を計算する.

誤差が許容されるのであれば
 N を小さくして効率化を図れる

高速フーリエ変換を行う.

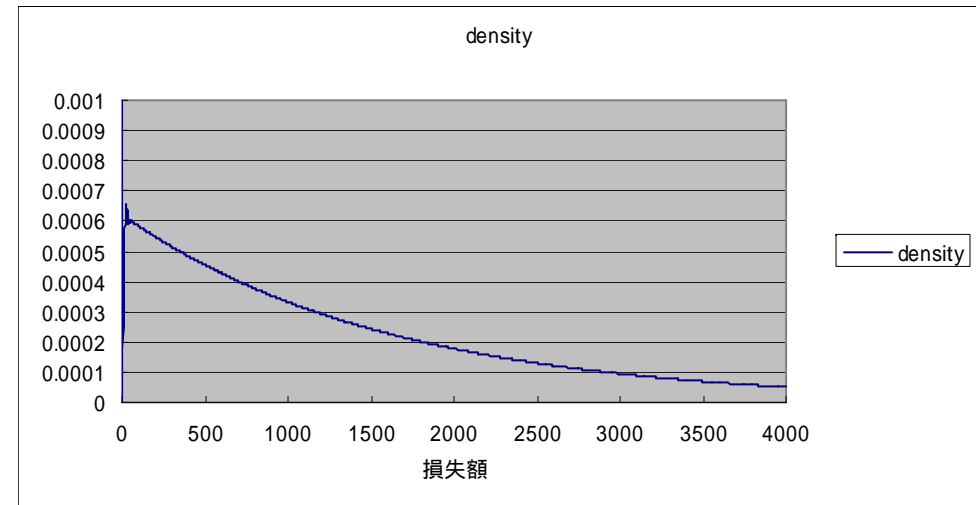
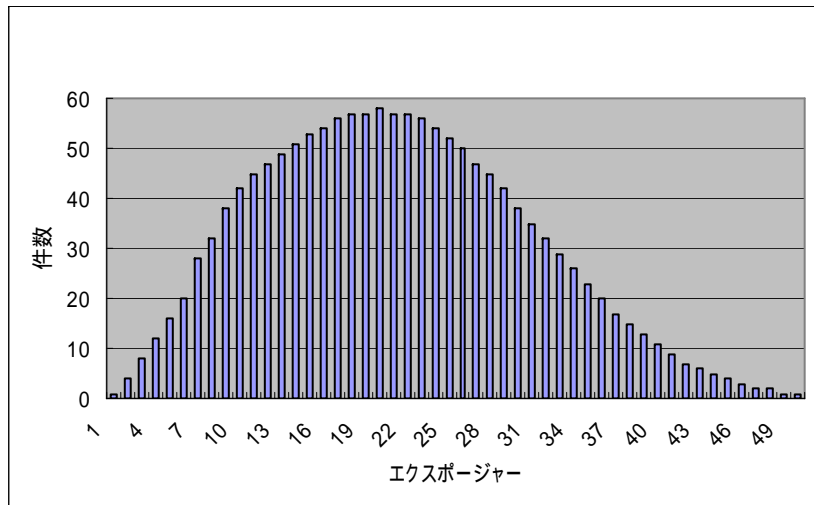
離散分布の場合, 結果には $1/\Delta x$ がかかっている(Dirac のデルタ関数に対応)ので確率を求めるためには Δx をかける必要がある.

FFTの適用

具体例

ポアソン近似

債務者数 1,487 , エクスపోージャー合計 31,678 ($<2^{15}$) , $T=1$



CPU: Core2Duo 2GHz, メモリ: 2GB, Rでの計算時間: 2.76秒

損失額が $2^{15}-1$ になる確率: $7.58E-13$

ポアソン近似の評価

ポアソン近似の検討

個別債務者(c は定数)

$$f_s(x) = e^{is} (1 - e^{-x}) + e^{-x} - e^{-x(1-e^{is})}$$
$$\approx cx^2 = c(pRT)^2$$

p が小さい場合に無視できるといわれる(Reiss [2003])

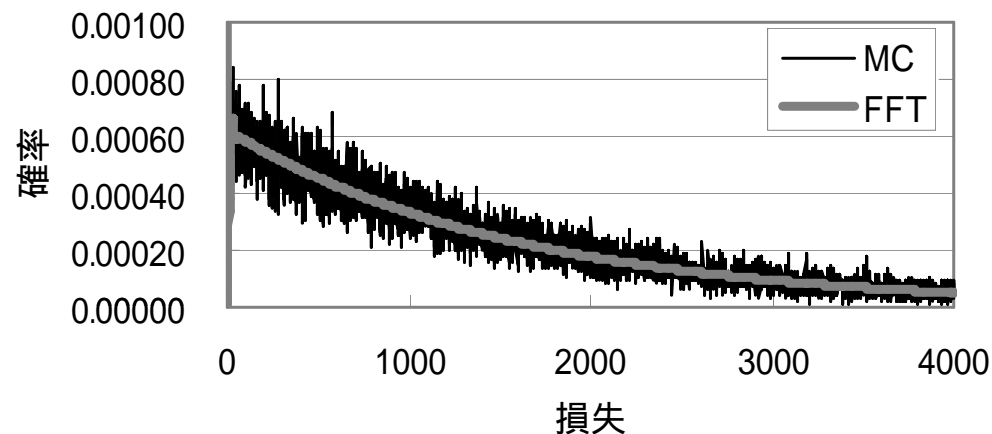
N 債務者(c は定数)

$$f_{Ns}(x) = \left(e^{is} (1 - e^{-x}) + e^{-x} \right)^N - e^{-x(1-e^{is})N}$$
$$\approx Ncx^2 = Nc(pRT)^2$$

N が大きい場合には必ずしも無視できない

モンテカルロシミュレーションとの比較

先ほどの具体例に関して、 $p=0.05$, $\sigma^2=1$ として100,000回のモンテカルロシミュレーション(ポアソン近似なし)とFFT(ポアソン近似)の結果を比較した。



95%VaRを比較すると、MCが4,448、FFTが4,770であり、7%以上異なる。

99%VaRでは、MCが6,508、FFTが7,262であり、11%以上異なる。

大規模近似

仮定

すべての債務者は同じ無条件デフォルト確率をもつ
債務者数 N は非常に大きい

近似

ポートフォリオの損失率は個別債務者のデフォルト率に等しい。

個別債務者のデフォルト率 $p(R) = 1 - e^{-pTR}$

ポートフォリオの損失率が q 以下になる確率

$$\begin{aligned}\Pr(Z < q) &= \Pr(1 - e^{-pTR} < q) = \Pr\left(R < -\frac{\ln(1-q)}{pT}\right) \\ &= G\left(-\frac{\ln(1-q)}{pT}\right)\end{aligned}$$

厳密解, 大規模近似との比較

$N=20$ (均一債務者, 各エクスポージャー1)で, $p=0.05$, $\sigma^2=1$ として厳密解(FFT)とポアソン近似(FFT)を比較した.

Table 4.8 ポアソン近似と厳密解の比較 ($N = 20$, 95%点)

T	1	2	3	4	5
厳密解	4	6	8	10	11
ポアソン近似	4	7	10	13	16

$N=15,000$ (均一債務者, 各エクスポージャー1)で, $p=0.05$, $\sigma^2=1$ として大規模近似(解析解)とポアソン近似(FFT)を比較した.

Table 4.14 ポアソン近似と大規模近似の比較 ($N = 15,000$, 95%点)

T	1	2	3	4	5
大規模近似	2,070	3,869	5,417	6,750	7,898
ポアソン近似	2,248	4,494	6,712	8,755	10,426

ポアソン近似の誤差

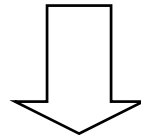
上記の計算結果から1割程度の誤差(損失が増加する方向)が生ずることがわかる。

リスク管理目的には不向き

長所

ポアソン近似を行わない場合と比較して、はるかに大きなポートフォリオに適用可能

計算速度が速い



誤差を許容できる場面では利用価値はある

動学コンピュータによる解釈

コピュラ関数

定義 関数: $C[0, 1]^N \rightarrow [0, 1]$ が次を満たすとき, C をコピュラと呼ぶ.

1. $[0, 1]$ の値をとり, C を分布関数とする確率変数 U_1, \dots, U_N が存在する
2. C は一様周辺分布を持つ. すなわち, すべての $n \leq N$ について, $u_n \in [0, 1]$, かつ次が成り立つ.

$$C(1, \dots, 1, u_n, 1, \dots, 1) = u_n$$

定理 (sklar) X_1, \dots, X_N を周辺分布関数 F_1, \dots, F_N と結合分布関数 F を持つ確率変数とする. このとき, N 次元コピュラが存在して, すべての $x \in \mathbb{R}^N$ について次の式を満たす.

$$F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_N(x_N))$$

$$F(X) \sim U$$

コピュラ関数と CreditRisk+

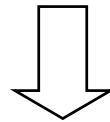
定義(アルキメデス型コピュラ) 次式で表されるコピュラ関数.

$$C(x) = \phi^{-1}\left(\sum_{n=1}^N \phi(x_n)\right)$$

ϕ を生成関数と呼ぶ

定義(クレイトンコピュラ) 生成関数が次式で与えられるアルキメデス型コピュラ.

$$\phi(x) = \frac{1}{\theta} (1 - x^{-\theta})$$



CreditRisk+ はクレイトンコピュラで表されることが知られている.

動学コピュラ

依存関係がコピュラ関数で表されているとき, Schönbucher [2001] に従うとその動的な振舞を分析することができる.

主要な結果

ポートフォリオのデフォルトが1件も生じていない場合, 債務者 i のデフォルト強度

$$h_i(t) = \lambda_i(t) \gamma_i(t) \frac{C_{x_i}}{C}, \quad \gamma_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right)$$

この状態から債務者 j がデフォルトした後の債務者 i のデフォルト強度

$$h_i^{-j}(t) = \lambda_i(t) \gamma_i(t) \frac{C_{x_i x_j}}{C_{x_j}}$$

デフォルト強度にジャンプが生ずる

動学コピュラ

2件目以降のデフォルト

既に k 件のデフォルトが生じているとき, デフォルトしていない債務者 i のデフォルト強度

$$h_{1\dots k,i}(t) = \lambda_i(t)\gamma_i(t) \frac{C_{x_1\dots x_k x_i}}{C_{x_1\dots x_k}}$$

この状態から債務者 j がデフォルトした後の債務者 i のデフォルト強度

$$h_{1\dots k,i}^{-j}(t) = \lambda_i(t)\gamma_i(t) \frac{C_{x_1\dots x_k x_j x_i}}{C_{x_1\dots x_k x_j}}$$

CreditRisk+ への適用

コピュラ関数

$$C(x_1, \dots, x_N) = \left(1 - N + \sum_{n=1}^N x_n^{-\sigma^2} \right)^{-1/\sigma^2}$$

デフォルトが生じていない状態から債務者 j がデフォルト

$$h_i^{-j}(t) = (\sigma^2 + 1)h_i(t)$$

k 件デフォルトしている状態から債務者 j がデフォルト

$$h_{1 \dots k, i}^{-j}(t) = \frac{(k+1)\sigma^2 + 1}{k\sigma^2 + 1} h_{1 \dots k, i}(t)$$

他の債務者がデフォルトすると
デフォルト強度が定数倍になる

CreditRisk+ への適用

デフォルトが生じていないときのデフォルト強度の振舞

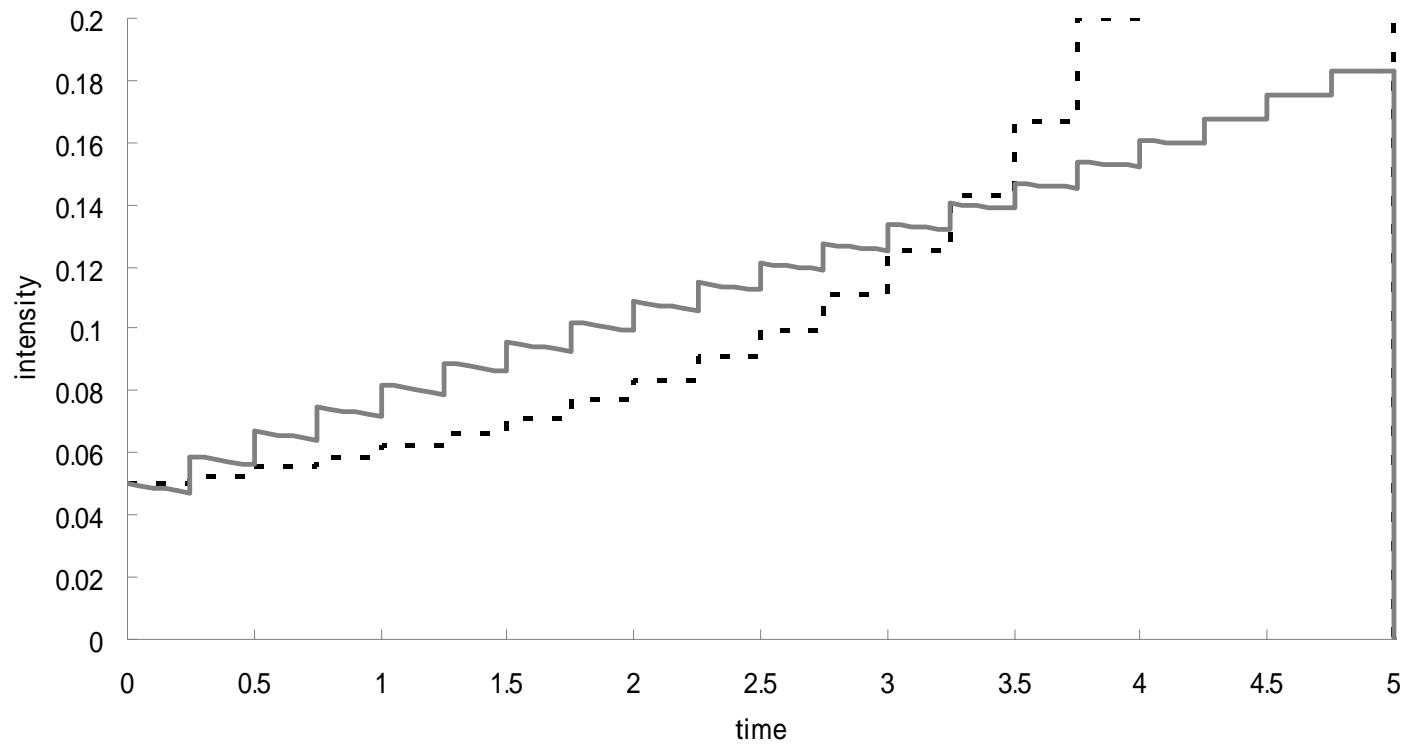
$$h_i(t) = \frac{p}{N - (N-1)e^{-\sigma^2 pt}}$$

$$h_{1,\dots,k,i}(t) = \frac{p(k\sigma^2 + 1)}{N - k + \sum_{j=1}^k e^{-\sigma^2 p(t-\tau_j)} - (N-1)e^{-\sigma^2 pt}}$$

個別債務者のデフォルト強度の推移

実線: CreditRisk+,

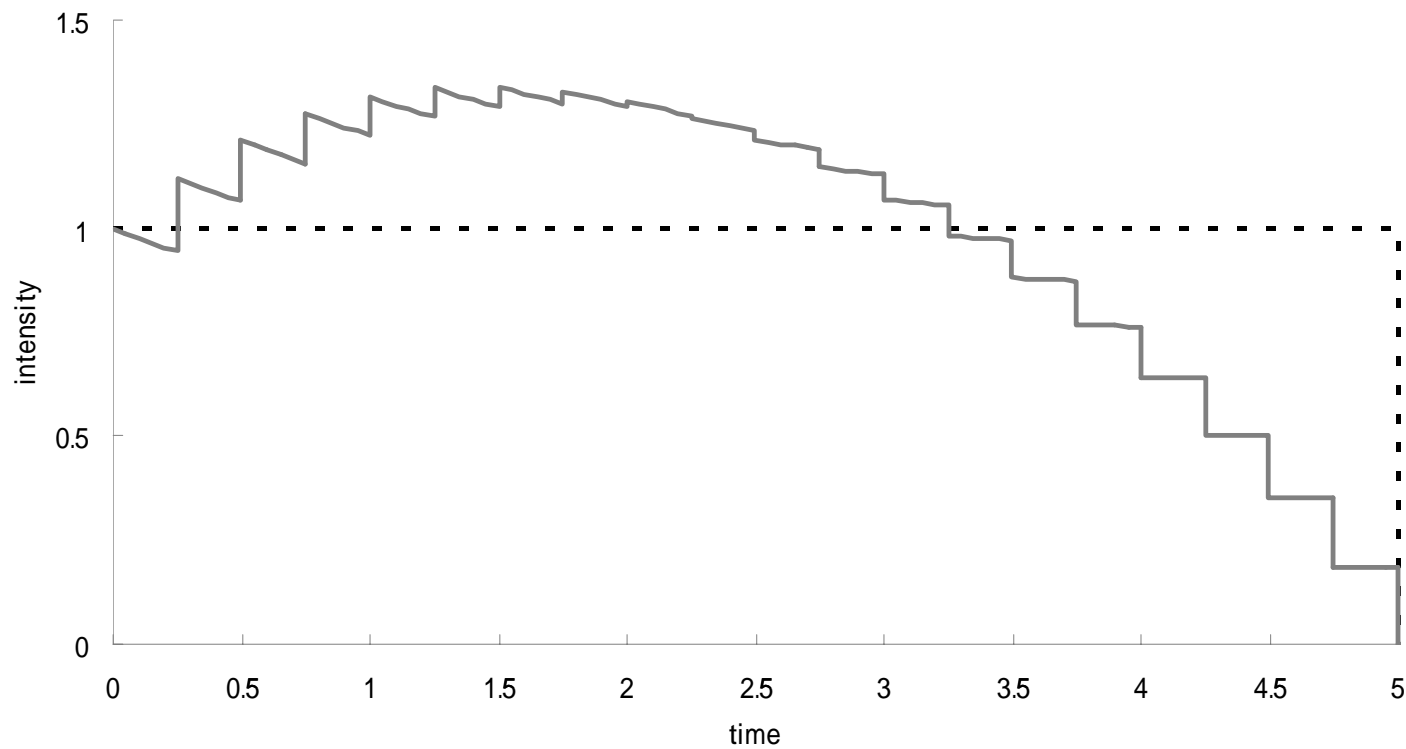
破線: top down approach (Giesecke, et al. [2005])



ポートフォリオのデフォルト強度の推移

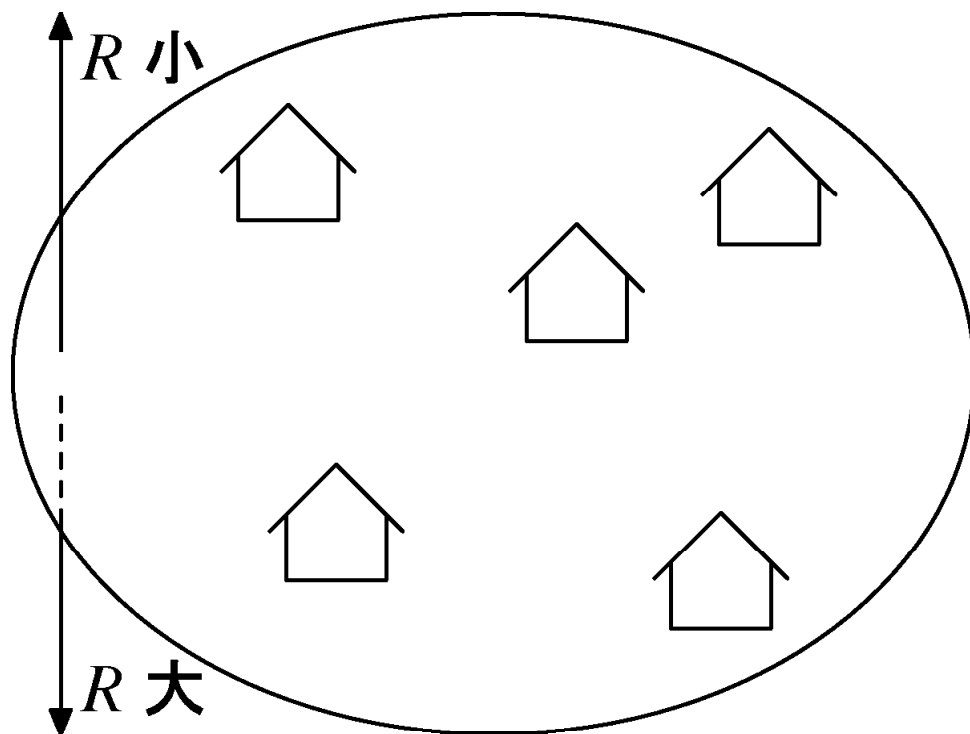
実線: CreditRisk+,

破線: top down approach (Giesecke et al. [2005])

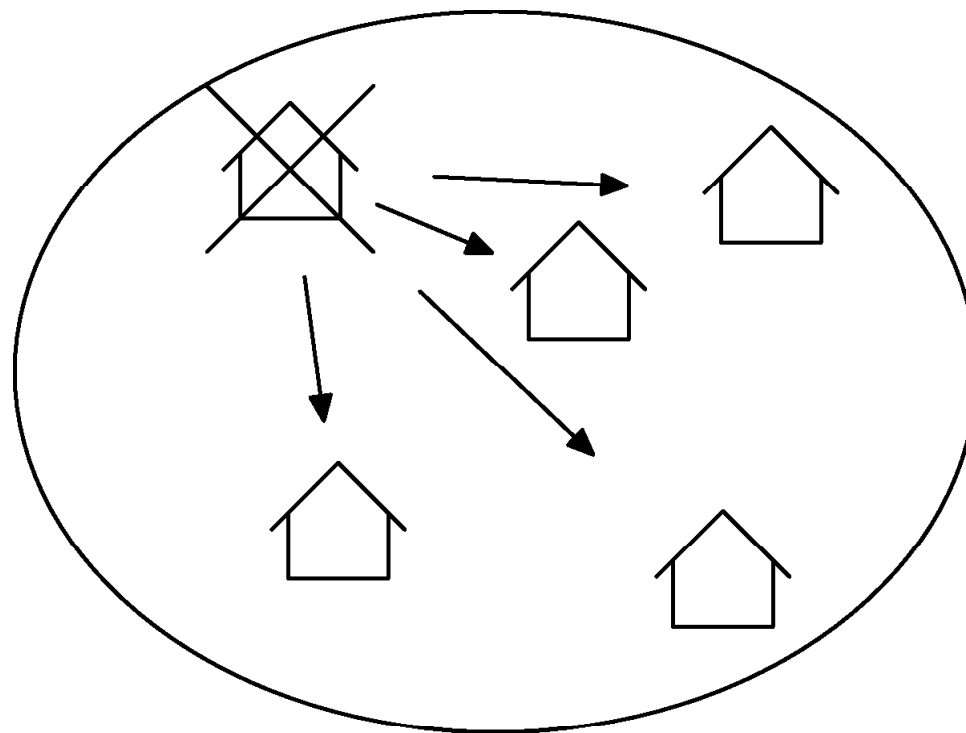


CreditRisk+ における解釈

ファクターモデル



動学コピュラ



CreditRisk+ における解釈

ファクターモデル

期初にガンマ分布により各債務者のデフォルト強度が決定され、その後、そのデフォルト強度によりデフォルトが生ずる。

動学コピュラ

ある債務者がデフォルトすることによってその他の債務者のデフォルト強度が増加し、あたかもデフォルトが伝播してゆくような依存関係がある。

比較的単純な CreditRisk+ のモデルであっても、
その動的な振舞は自明でない。

参考文献

Reiss, O. Fourier Inversion Algorithms for Generalized CreditRisk+ Models and an Extension to Incorporate Market Risk. WIAS, 2003.

Schönbucher, P. J. and Schubert, D. Copula Dependent Default Risk in Intensity Models, working paper, 2001.

Giesecke, K. and Goldberg, L. R. A Top Down Approach to Multi-name Credit, working paper, 2005. (revised in Nov. 2007)