

CoVaR によるシステミック・リスク計測 ～確率的コピュラによる比較分析～

監物 輝夫

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科
金融戦略・経営財務コース

2017 年 3 月 15 日

研究の目的

- システミック・リスク¹が顕在化した場合、実態経済に及ぼす影響がその他のリスクと比較して大きい場合、金融システムの安定性を確保する必要がある。
- 直感的に分かりやすい指標を用いて、システミック・リスクを定量的に評価できるようにしたい。
→ CoVaR および D-CoVaR というリスク尺度を用いて分析。

なぜ CoVaR で分析を行うのか？

- 例えば、システミック・リスクの主要な分析手法の一つとして、グラフ理論を用いたネットワーク・アプローチがある。
- しかし、ネットワーク・アプローチで分析を行うには銀行間取引のデータなど、入手できないデータが必要となる。
- CoVaR とは条件付きの Value at Risk であり、VaR は実務でも広く用いられているため、イメージしやすい利点もある。

¹確立した定義は無いが、例えば日銀では、「個別の金融機関の支払不能等や、特定の市場または決済システム等の機能不全が、他の金融機関、他の市場、または金融システム全体に波及するリスクのこと」としている。

先行研究と課題

先行研究

- Adrian and Brunnermeier (2016) : 条件付 VaR である CoVaR と、派生指標である D-CoVaR をシステミック・リスク指標として提案.
- Girardi and Ergün (2013) : CoVaR の定義を拡張し、依存関係の動的評価に DCC-GARCH を用いて分析.
- Reboredo and Ugolini (2015) : 依存関係の動的評価に Patton (2006) の TVP(Time Varying Parameter) コピュラを導入.
→システミック・リスクの評価で重要となる**裾依存性**を動的に捉えられる.

→以下、論文をそれぞれ AR(2016)、GE(2013) 及び RU(2015) として表記する.

先行研究での課題

- 定義が論文によって異なり、また、リスク量を計測するモデルも異なるため、**どの定義やモデルが良いか判断できない**.
- 既存の研究は結果の解釈のみで、**指標の水準がイメージしにくい**.

研究の方法

分析データ

- **東証 33 業種別株価指数**のうち、“銀行業”、“証券・商品先物取引業”、“保険業”、“不動産業”及び“その他金融業”を用いる。
- データの期間は 2000/1/5～2015/12/31(分析は日次データを使用)。
- “金融システム全体”の指数を、上記5つの業種別株価指数を時点毎に時価総額で加重平均した値として定義する。
→それぞれの業種と、**金融システム全体を表す指数との依存関係**を分析。

CoVaR 及び D-CoVaR による比較・考察

- リスク水準を作り、指標の値に対して解釈を加える。
→“危険水準”、“警戒水準”、“注意水準”と区分し、システムミック・リスクが顕在化した事象に照らして妥当性を検証。
- 先行研究 (DCC-GARCH モデルと Time Varying Parameter コピュラモデル) を用いた分析。
- 提案するモデル (**確率的コピュラモデル**) を用いた分析。

研究結果の概要

本研究による3つの貢献

- ① CoVaR 及び \mathcal{D} -CoVaR について、相関係数に対する変化やグラフを用いることで、特徴や性質を整理した。
→ \mathcal{D} -CoVaR を用いた分析が望ましい。
- ② 適切な水準感を持つようなリスク水準を構築。
→ 動的な周辺分布を仮定した分析を通して、リーマンショックなど、システムミック・リスクの具体的な事象に対して妥当な水準を示した。個別金融機関による分析でも妥当性を確認。
- ③ 確率的コピュラモデルが、その他のモデルと比較して依存関係を柔軟に評価することを示した。
→ 静的な周辺分布を仮定した分析、ローリング推計した順位相関との比較を通じて、モデルの柔軟性を確認。

CoVaR 及び \mathcal{D} -CoVaR の全体像

CoVaR 及び \mathcal{D} -CoVaR の定義

- CoVaR 及び \mathcal{D} -CoVaR の定義については、論文によって若干異なる。
- 相関係数に対する単調増加性を持ち、かつ、値の安定性があるものを分析で用いる。
- その結果、本研究では以下の表のとおり各リスク指標の定義を採用している。

本研究で採用した各リスク指標の定義

	AR(2016)	GE(2013)	RU(2015)
VaR	○ (定義は共通)		
CoVaR		○ (定義は共通)	
\mathcal{D} -CoVaR	○		

- ただし、AR(2016) の \mathcal{D} -CoVaR を定義するために用いる CoVaR の定義は GE(2013) や RU(2015) のものとする。

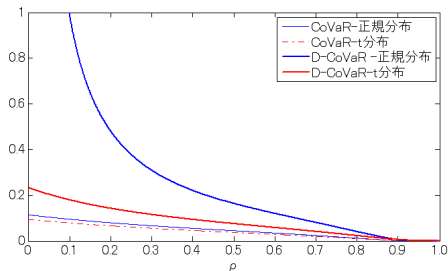
\mathcal{D} -CoVaR について

Figure: CoVaR 及び \mathcal{D} -CoVaR の相関 ρ に対する変化率

 \mathcal{D} -CoVaR の性質

- 変化率を、相関係数が 0.001 増加した際の CoVaR 及び \mathcal{D} -CoVaR の増加率としている。
- 独立を仮定すると、 \mathcal{D} -CoVaR の値はゼロとなるため、水準感を持ちやすい。
- 上図の通り、相関に対する変化率が CoVaR よりも大きいため、裾依存に関する感応度が高い。
→ CoVaR を包括する指標となる。

確率的コピュラとは

- 確率的コピュラは Hafner and Manner (2012) によって考案された、動的コピュラモデルである。

コピュラの設定

時点 $t = 1, 2, \dots, T$ に対して、以下のように動的にパラメータが変化するコピュラを考える。 $C(\cdot, \cdot)$ はコピュラ関数とすると

$$(u_t, v_t) \sim C(u, v | \theta_t)$$

コピュラの動的パラメータ $\theta_t \in \Theta \subset \mathbb{R}$ に対し、 $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow \Theta$ となる関数と潜在変数列 $\{\lambda_t\}_{t=1}^T$ を用いて $\theta_t = \Psi(\lambda_t)$ とする。

潜在変数列について

パラメータ $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ に対して、以下の通り AR(1) 過程を用いて潜在変数列を構築する。

$$\lambda_t = \alpha + \beta\lambda_{t-1} + \gamma\varepsilon_t$$

* $|\beta| < 1$, $\gamma > 0$ とし、 ε_t は *i.i.d.* で、 $N(0, 1)$ に従うとする。

確率的コピュラの推定方法

推定する尤度関数

$$L(\omega; U, V) = \int \prod_{t=1}^T c(u_t, v_t | \lambda_t, U_{t-1}, V_{t-1}, \omega) p(\lambda_t | \Lambda_{t-1}, \omega) d\Lambda$$

* $c(u_t, v_t | \lambda_t, U_{t-1}, V_{t-1}, \omega)$ はコピュラ密度関数で、 $p(\lambda_t | \Lambda_{t-1}, \omega)$ は λ_t の条件付密度関数

** $U = \{u_t\}_{t=1}^T, V = \{v_t\}_{t=1}^T, U_t = \{u_\tau\}_{\tau=1}^t, V_t = \{v_\tau\}_{\tau=1}^t, \Lambda_t = \{\lambda_\tau\}_{\tau=1}^t$

- 解析的な方法や数値的手法を用いても解くことが非常に難しい。
- Liesenfeld and Richard (2003) は Efficient Importance Sampling(EIS) を用いることを提案。
- 対数尤度関数を最大化し、最尤推定値であるパラメータ $\hat{\omega} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ から $\hat{\lambda}_t$ を算出し、 $\hat{\theta}_t = \Psi(\hat{\lambda}_t)$ を得る。

EIS によるパラメータの更新

EIS (Efficient Importance Sampling) とは

補助サンプラー $\{m(\lambda_t | \Lambda_{t-1}, a_t)\}_{t=1}^T$ を導入し、尤度関数の計算負荷を減少させる補助パラメータ $\{a_t\}_{t=1}^T$ を見つけていく。最終的には、 $\{\tilde{\lambda}_t^{(i)}(a_t)\}_{t=1}^T$ を用いて、

$$\bar{L}_N(\omega; U, V) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\prod_{t=1}^T \left[\frac{c(u_t, v_t | \tilde{\lambda}_t^{(i)}(a_t), U_{t-1}, V_{t-1}, \omega) p(\tilde{\lambda}_t^{(i)}(a_t) | \bar{\Lambda}_{t-1}^{(i)}(a_{t-1}, \omega))}{m(\tilde{\lambda}_t^{(i)}(a_t) | \bar{\Lambda}_{t-1}^{(i)}(a_{t-1}, a_t))} \right] \right)$$

を考えていくことになる。ここで、 $a_t = (a_{1,t}, a_{2,t})$ とする。

補助サンプラーの分解

Liesenfeld and Richard (2003) に沿って、補助サンプラーを分解していくと、

$$\mu_t = \sigma_t^2 \left(\frac{\alpha + \beta \lambda_{t-1}}{\gamma^2} + a_{1,t} \right), \quad \sigma_t^2 = \frac{\gamma^2}{1 - 2\gamma^2 a_{2,t}}$$

とすることで、

$$m(\lambda_t | \Lambda_{t-1}, a_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{(\lambda_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

のように正規分布の形で表すことができるため、 $\tilde{\lambda}_t^{(i)}(\omega)$ から $\tilde{\lambda}_t^{(i)}(\hat{a}_t)$ にパラメータを更新できる。

CoVaR と D-CoVaR のリスク水準 (水準のイメージ)

- 変数間の独立性の仮定や順位相関を用いることによって、以下のリスク水準に分類している。
- 水準の程度が高まるほどシステムミックの顕在化に対して対策を講じる必要がある (ストレス・テストなど)。

リスク水準の区分

危険水準

金融システムとの相関が非常に高いため、システムミック・リスクが非常に大きいと判断する。

→リーマンショック等を想定。

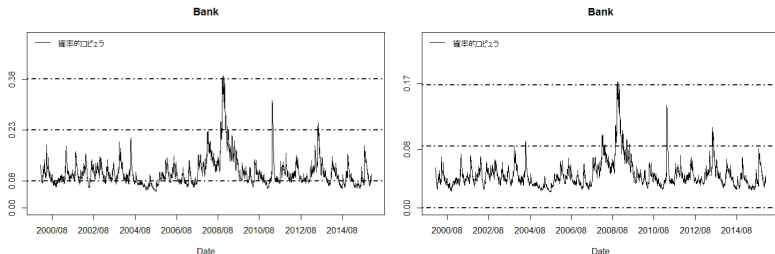
警戒水準

金融システムとの相関が比較的高く、システムミック・リスクが中程度に大きいと判断する。

注意水準

金融システムとの相関は小さく、システムミック・リスクは低いと判断できるが、この水準を超える場合は注意が必要である。

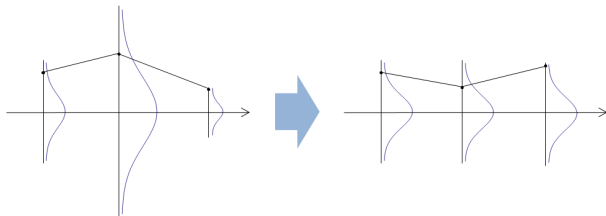
動的な周辺分布による推移比較



*ほとんど結果が変わらないため、確率のコピュラのみ結果を記載。

- 左図は CoVaR を右図は D -CoVaR を表している。
- 黒い点線は、上から危険基準、警戒基準及び注意水準をそれぞれ表している。
- CoVaR が捉えることが出来なかったリスクを D -CoVaR は良く捉え、リーマンブラザーズ破綻 (2008 年 9 月 5 日) 前後で**危険水準を超えるまで上昇**。
→他にも、東日本大震災や、日銀による量的・質的金融緩和などで上昇しており、リスク水準の妥当性が確認できる。

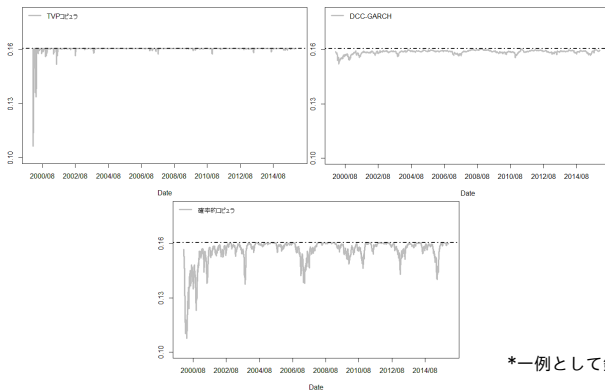
静的な周辺分布を用いた分析について



動的・静的な周辺分布から生じる CoVaR 及び D -CoVaR の変化

- 動的な周辺分布による計測の有効性を確認したが、上図のとおり、標準偏差に依存しているため、**モデルの差異は現れにくい**。
- そのため、静的な周辺分布でも分析を試みる。
- 分析に当たって、周辺分布は Hansen (1994) の skewed- t 分布を用いる。

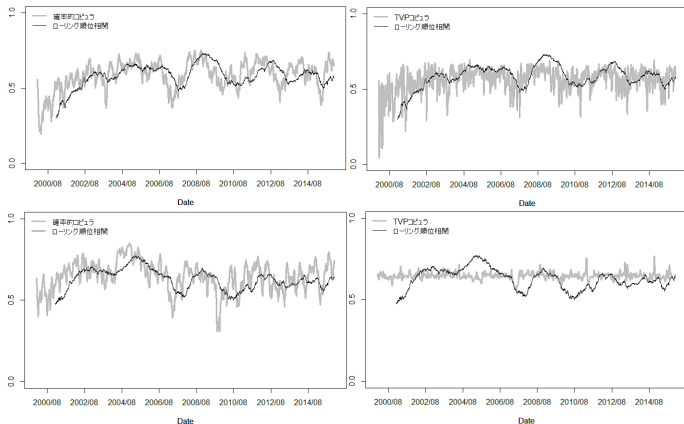
静的な周辺分布による推移比較



*一例として銀行業の結果を記載。

- 上左図は DCC-GARCH モデルを、上右図は TVP コピュラモデルを、下図は確率的コピュラモデルを表している。
- 黒い点線は、危険基準を表す。
- 確率的コピュラモデルは、その他モデルと比較して柔軟に評価しているように見える。
- リスクを柔軟に評価していることを、順位相関による分析で確認する。

順位相関による推移比較



*一例として銀行業（上）、その他金融業（下）の結果を記載。

- 左は確率的コピュラモデルを、右は TVP コピュラモデルを表している。
- 確率的コピュラが順位相関を上手く捉えていることが確認できる。
- 静的な周辺分布による分析結果と併せて、その他モデルと比較して確率的コピュラモデルが依存関係を柔軟に評価しているといえる。

個別金融機関のリスク水準

	注意～警戒	警戒～危険	危険～		注意～警戒	警戒～危険	危険～
3メガバンク	2,982	152	7	京都	3,013	128	0
三菱東京UFJ	2,981	153	7	南都	3,036	105	0
三井住友	2,982	152	7	鳥取	3,068	73	0
みずほ	2,980	156	5	山陰合同	3,036	105	0
地方銀行	3,037	104	0	中国(※)	3,016	125	0
青森	3,042	99	0	広島	3,016	125	0
みちのく	3,036	105	0	阿波	3,045	96	0
岩手	3,047	94	0	百十四	3,031	110	0
東北	3,046	95	0	伊予(※)	3,018	123	0
七十七	3,025	116	0	四国	3,068	73	0
秋田	3,049	92	0	西日本シティ	3,056	85	0
山形	3,028	92	0	佐賀	3,035	106	0
東邦	3,051	90	0	十八	3,042	99	0
常陽	3,005	136	0	大分	3,044	97	0
筑波	3,037	104	0	宮崎	3,056	85	0
群馬(※)	3,020	121	0	琉球	3,052	89	0
武蔵野	3,026	115	0	沖縄	3,058	83	0
千葉(※)	2,999	142	0	第二地方銀行	3,057	84	0
千葉興業	3,034	107	0	北日本	3,067	74	0
横浜(※)	3,002	139	0	福島	3,077	64	0
第四	3,015	126	0	大東	3,060	81	0
北越	3,031	110	0	栃木	3,042	99	0
山梨中央	3,041	100	0	東和	3,062	79	0
八十二(※)	3,032	109	0	京葉	3,031	110	0
大垣共立	3,021	120	0	東日本	3,045	96	0
十六	3,022	119	0	長野	3,084	57	0
静岡(※)	3,006	135	0	愛知	3,028	113	0
スルガ	3,037	104	0	名古屋(※)	3,016	125	0
清水	3,042	99	0	中京	3,043	98	0
百五	3,046	95	0	第三	3,055	86	0
三重	3,057	84	0	みなと	3,064	77	0
北國	3,025	116	0	トマト	3,056	85	0
福井	3,050	91	0	愛媛	3,089	52	0
滋賀(※)	3,019	122	0	国際統一基準行	3,016	125	0

備考： ※印は国際統一基準行を表す。ただし、3メガバンクは除いている。また、数字は日数を表している。

結論

分析まとめ

- CoVaR と D -CoVaR の性質や特徴を把握. D -CoVaR が CoVaR を包括する指標であることを確認した.
- リーマンショック等のシステムック・リスク事象に対して、統合的に対応させることができた.
- 順位相関を用いた分析を通じて、確率的コピュラがその他モデルと比較して柔軟に依存関係をとらえることを確認した.

今後の課題

- ヴァイン・コピュラなどを用いて、多次元に依存関係を評価すること.
- カテゴリ毎のリスク寄与度に関する分析.
→ Cao (2013) による分析.

参考文献 1

- [1] T. Adrian and M. Brunnermeier (2014), "CoVaR", *Federal Reserve Bank of New York Staff Reports*
- [2] Z. Cao (2013), "Multi-CoVaR and Shapley value: A systemic risk measure", *working paper, Banque de France*
- [3] P. Embrechts, A. J. Mcneil and D. Straumann (2002), "Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls", *Risk management: Value at risk and beyond*, 176–223
- [4] R. Engle, "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate GARCH models", *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(3) 339–350
- [5] G. Girardi and A. T. Ergün (2013), "Systemic risk measurement: Multivariate GARCH estimation of CoVaR", *Journal of Banking & Finance*, 37 3169–3180
- [6] C. M. Hafner and H. Manner (2012), "Dynamic stochastic copula models: Estimation, inference and applications", *Journal of Applied Econometrics*, 27 269–295
- [7] B. E. Hansen (1994), "Autoregressive Conditional Density Estimation", *International Economic Review*, 35(3) 705–730
- [8] R. Liesenfeld and J. F. Richard (2003), "Univariate and multivariate stochastic volatility models: estimation and diagnostics", *Journal of Empirical Finance*, 10 505–531

参考文献 2

- [9] R. Liesenfeld and J. F. Richard (2008), "Improving MCMC, using efficient importance sampling", *Computational Statistics and Data Analysis*, 53 272–288
- [10] G. Mainik and E. Schaanning (2012), "On dependence consistency of CoVaR and some other systemic risk measures", *working paper, ETH, Zürich*
- [11] A. J. Patton (2006), "Modelling asymmetric exchange rate dependence", *International Economic Review*, 47(2) 527–556
- [12] J. C. Reboredo and A. Ugolini (2015), "Systemic risk in European sovereign debt markets: A CoVaR-copula approach", *Journal of International Money and Finance*, 51 214–244
- [13] 内田善彦・菊池健太郎・丹羽文紀・服部彰夫 (2014)、「システムミック・リスク指標に関するサーベイ手法の整理とわが国への適用可能性一」、『金融研究』、第 33 巻第 2 号、1–46
- [14] 戸坂 凡展・吉羽 要直 (2005)、「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」、『金融研究』、第 24 巻別冊 2 号、115–151
- [15] 増島 雄樹 (2015)、「システムミック・リスクに関わる分析手法の動向と評価一国際的な潮流と日本への合意一」、金融庁金融研究センター ディスカッションペーパー、DP2014-10
- [16] 渡部 敏明 (2000)、『ボラティリティ変動モデル』、朝倉書店